Notas en microeconomía intermedia

Diogenes Cruz Figueroa García

Diciembre, 2024

Cuando todavía era estudiante de pre-grado, comencé a dar asesorías de microeconomía. Para facilitar mi trabajo, y ayudar a mis alumnos, empecé a escribir notas de teoría económica que pudieran consultar en caso de que no entendieran algún tema. Las primeras notas que escribí eran muy sencillas, y no entraba tan a detalle en los temas. Con el tiempo, actualizarlas y mejorarlas se convirtió en un pasatiempo, y en un ejercicio para no olvidar los temas que había aprendido en la universidad. Las notas evolucionaron, eventualmente, a un documento extenso que cubre la mayoría de los temas de uno o dos cursos de microeconomía intermedia.

El presente documento es el resultado de varios años de ir actualizando las notas, así como irlas compilando en un solo documento. Este documento abarca la teoría del consumidor, del productor, y hasta la teoría de equilibrio general.

- Las preferencias sobre canastas de bienes, y la restricción presupuestal.
- La función de utilidad, el problema de maximización de utilidad, y el problema dual de minimización de gasto que dan resultado a las funciones de demanda "Marshallianas" y "Hicksianas".
- Análisis del bienestar individual mediante las variaciones compensatorias y equivalentes, así como la recuperación de las preferencias del consumidor a partir de las funciones de demanda observadas.
- El problema de agregación de preferencias, la demanda agregada, y cuándo podemos utilizar la demanda agregada para análisis del bienestar social.
- Las preferencias bajo incertidumbre.
- Las decisiones de producción.
- Equilibrio general.

De la mano de esto, se presentan puntos relacionados con la teoría de las preferencias reveladas. La Teoría de las Preferencias Reveladas compite con la teoría clásica para explicar el comportamiento de los consumidores. Si bien la teoría clásica tiene una mayor aceptación entre los economistas, la teoría de las preferencias reveladas tiene algunos resultados coincidentes con la teoría clásica que aportan una mayor intuición sobre lo que los economistas entendemos como "preferencias racionales". Estas secciones generalemnte no son parte de un curso de microeconomía intermedia, pero se dejan para que el lector interesado pueda profundizar en el tema.

Finalmente, versiones anteriores de mis notas suelen terminar en otros sitios de internet. No tengo problema con que se compartan. Sin embargo, me resulta molesto que diversos de estos sitios requieran que el usuario se registre y pague para acceder a estos documentos. Les recuerdo que este documento es gratuito, y las versiones más actualizadas las podrán encontrar siempre en mi sitio web: https://sites.google.com/view/diogenescfg/home/.

Contents

1 Canastas y Preferencias **6**

1.1 Bienes y Conjuntos de consumo . . . 6

1.2 Preferencias . . . 7

1.3 La restricción presupuestal . . . 13

1.4 Axioma Débil y Fuerte de las Preferencias Reveladas . . . 15

2 La función de utilidad **19**

2.1 Continuidad de las preferencias y el Teorema de Debreu . . . 19

2.2 Curvas de indiferencia y la función de utilidad . . . 22

2.3 Utilidad Marginal y Tasa Marginal de Sustitución . . . 23

2.4 Reflexividad, Completitud y Transitividad . . . 25

2.5 Monotonicidad . . . 25

2.6 Convexidad de las preferencias . . . 26

2.6.1 Homoteticidad y Cuasilinealidad . . . 30

2.7 Funciones de utilidad comunes . . . 31

2.7.1 Elasticidad de sustitución constante . . . 31

2.7.2 Utilidad cuasilineal . . . 37

3 Maximización de Utilidad y Demanda Marshalliana **38**

3.1 El Método de Kuhn-Tucker . . . 38

3.2 La correspondencia de demanda marshalliana . . . 41

3.2.1 Un ejemplo sencillo de función de demanda marshaliana . . . 41

3.2.2 Interpretando las Condiciones de Kuhn-Tucker . . . 44

3.3 Simplificaciones a UMAX: Ley de Walrás y condiciones de Inada . . . 45

3.3.1 Optimización de una función cuasilineal . . . 48

3.4 Propiedades de la correspondencia (función) de demanda Marshalliana . . . 50

3.4.1 Complementos Perfectos: función no diferenciable . . . 53

3.4.2 Sustitutos Perfectos: ejemplo de correspondencia de demanda . . . 54

3.5 Elasticidades y Agregaciones . . . 55

3.6 Representaciones gráficas . . . 58

3.7 La función de utilidad indirecta . . . 60

3.7.1 Propiedades de la función de utilidad indirecta . . . 61
3.7.2 El Teorema de la Envolvente . . . 62
3.7.3 Utilidad en términos de dinero . . . 64
3.7.4 La identidad de Roy . . . 66

4 Demanda de Slutsky **69**

4.1 Maximización de utilidad y demanda de Slutsky . . . 70
4.2 Aplicaciones de la demanda de Slutsky . . . 72
4.2.1 Consumo intertemporal . . . 73
4.2.2 Ocio-consumo . . . 76
4.3 Preferencias reveladas y variación compensatoria a la Slutsky . . . 77
4.3.1 Matriz de sustitución de Slutsky . . . 80

5 Minimización de gasto **83**

5.1 El problema de minimización de gasto y la demanda hicksiana . . . 84
5.1.1 Un ejemplo sencillo . . . 87
5.1.2 Representación gráfica . . . 88
5.2 Propiedades de la correspondencia de demanda Hicksiana . . . 89
5.2.1 Ley de la Demanda Compensada . . . 90
5.2.2 Elasticidades de la demanda Hicksiana . . . 92
5.3 La función de gasto mínimo y el Lema de Shephard . . . 93
5.3.1 Propiedades de la función de gasto mínimo . . . 93
5.3.2 El Lema de Shephard . . . 95
5.3.3 Simetría en las funciones de demanda hicksiana . . . 96
5.4 Dualidad entre UMAX y GMIN . . . 97
5.4.1 Un ejemplo sencillo . . . 101
5.5 La ecuación de Slutsky . . . 102

6 Análisis del bienestar **108**

6.1 Medidas de bienestar: variación compensatoria y equivalente a la Hicks . . . 109
6.1.1 Variación compensatoria a la Hicks . . . 110
6.1.2 Variación equivalente a la Hicks . . . 114
6.2 Relación entre VC y EC . . . 116

6.3 Relación de VC y VE con el excedente del consumidor . . . 118
6.3.1 Bienes neutros al ingreso . . . 120
6.4 El problema de integrabilidad . . . 123
6.4.1 Integrabilidad . . . 124
6.4.2 Recuperación de preferencias . . . 125
6.4.3 Una nota sobre trabajos empiricos . . . 127
6.5 Preferencias Reveladas y el Teorema de Afriat . . . 128

7 La Demanda Agregada **130**
7.1 Demanda Agregada e Ingreso Agregado . . . 130
7.2 Demanda Agregada y el Axioma Débil de Preferencias Reveladas . . . 133
7.3 El Consumidor Representativo . . . 135
7.3.1 El Consumidor Representativo Positivo . . . 136
7.3.2 El Consumidor Representativo Normativo . . . 137

8 Decisiones bajo incertidumbre **140**
8.1 Loterías . . . 140
8.2 Preferencias sobre loterías . . . 142
8.3 Dinero y Aversión al riesgo . . . 146
8.3.1 Activos de riesgo y activos libres de riesgo . . . 151
8.3.2 Utilidad por bienes . . . 151
8.4 Medidas de Aversión al Riesgo . . . 152
8.5 Maximización de utilidad ex ante . . . 155
8.5.1 Elección de cultivos (1) . . . 155
8.5.2 Elección de Cultivos (2) . . . 156
8.5.3 El problema del seguro . . . 157
8.5.4 Selección Adversa . . . 158
8.6 Comparando distribuciones . . . 162

9 Producción **166**
9.1 Conjuntos de producción . . . 166
9.2 La función de producción . . . 167
9.3 Maximización de utilidades y minimización de costos . . . 170

10 Equilibrio General **176**

10.1 Equilibrio Competitivo en una Economía de Intercambio Puro 176

10.2 La Caja de Edgeworth 179

10.3 Óptimo de Pareto 182

10.4 Nucleo de la economía y primer teorema fundamental del bienestar 183

10.5 Equilibrio Competitivo en una Economía con Producción 186

10.5.1 Un ejemplo sencillo 186

10.5.2 Los teoremas del bienestar en una economía con producción 188

10.5.3 La frontera de posibilidades de producción y el problema del planificador central 189

10.6 Dos modelos de economía con producción 191

10.6.1 Dos factores de producción 192

10.6.2 Oferta laboral endógena 196

10.7 Existencia y unicidad del equilibrio competitivo 198

10.8 Sobre los teoremas del bienestar 198

1 Canastas y Preferencias

A menudo encontramos que los economistas realizan análisis de grandes mercados, y a partir de eso concluyen cómo actuarán los consumidores en caso de observarse cambios en las circunstancias que éstos enfrentan. Si bien esto pareciera un brinco lógico muy grande, hay ciertos supuestos que nos permiten obtener estas conclusiones de ésta manera. Aquí, partiremos de un principio individualista, esto es, no existen "los consumidores" como un agregado coordinado, sino que existen "el(la) consumidor(a)". Así, nuestra unidad de análisis es un único individuo. No es necesario justificar por qué analizamos a un sólo individuo y no a un colectivo, pues para la mayoría de los casos que nos preocupan, los colectivos son únicamente la suma de los individuos. Antes de pasar de lleno al estudio de las preferencias, servirá antes hablar sobre bienes y conjuntos de consumo.

1.1 Bienes y Conjuntos de consumo

El primer supuesto que tendremos en esta teoría es que losagentes se enfrentan un mercado en el cuál se ofrece un universo de bienes distintos que puede adquirir. A este **conjunto** lo denotaremos como $X \subseteq \mathbb{R}^L$. Esto es mera notación, y en general quiere decir que hay L bienes disponibles que el consumidor puede adquirir, en las cantidades que desee adquirir. Denotamos un elemento de este conjunto como un vector (podemos pensarlo como una lista) dado por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$. A manera de ejemplo, si hay dos bienes en la economía, entonces $L = 2$. Digamos que estos bienes son leche (x_1) y arroz (x_2). Entonces, una canasta $x = (2, 6)$ quiere decir que hay un litro de leche y seis kilogramos de arroz, mientras que una canasta $x' = (8, 4)$ contiene ocho litros de leche y cuatro kilogramos de arroz.

Usaremos el caso de dos bienes extensamente en esta nota por su facilidad de trabajar, así como por permitir representaciones gráficas fáciles. En un plano cartesiano podemos colocar x_1 en el eje de las abscisas, y x_2 en el de las ordenadas. Las canastas anteriores las representaremos $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

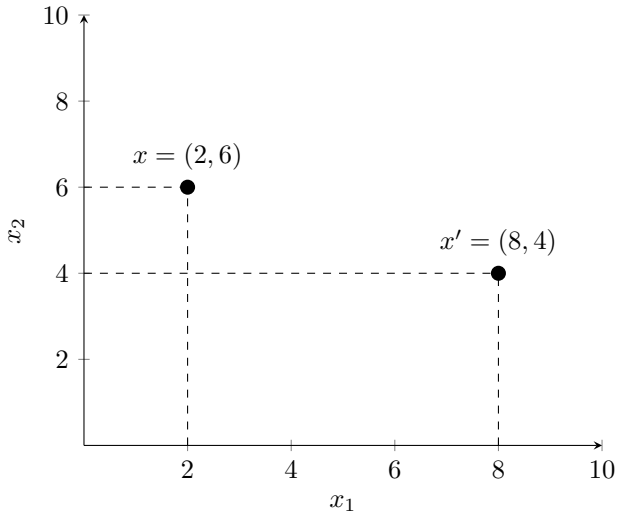


Figure 1.1: Dos canastas de bienes: $(1, 6)$ y $(8, 4)$.

Los bienes pueden ser tan distintos como queramos; así como pueden ser leche, huevo y pan, X puede incluir además televisiones, viajes a Istambul, paseos en lancha en lagos, operaciones de rodilla, etcétera.

Como podremos ver, este universo puede ser absurdamente grande, pues además podemos asumir que bienes de distinta calidad son bienes distintos (algo intuitivo, no es lo mismo un Ferrari que un Jetta, aunque los dos sean automóviles), sino que bienes en distintos momentos también son bienes distintos (un café a las 7am es distinto a un café a las 11pm), o en lugares distintos (una botella de agua en el desierto es distinta a una botella de agua en la ciudad). Para el nivel de abstracción que se maneja en un curso más avanzado, simplemente suponemos que este conjunto X, aunque sea absurdamente grande, es finito (hay un número limitado de bienes en el mercado).

Algo que llama la atención de nuestro ejemplo anterior es que, si bien la leche y el arroz puede ser dividido en cuartos de litro y mitades de kilo, hay muchos bienes que no aceptan divisiones. Por ejemplo, no tiene sentido hablar de comprar siete y tres octavos de una gallina ponedora. Nos evitaremos estas complejidades, y asumiremos que todos los bienes están disponibles en cualquier cantidad dentro de los números reales (podrían pensar en comprar π gallinas). Otro problema que llama la atención es que hay bienes de los cuales se compran solamente una unidad (por ejemplo, una casa). Hay modelos de demanda unitaria, pero por ahora nos evitaremos esta complejidad, y supondremos que si el agente tiene suficiente ingreso, podrá comprar cuantas casas desee.

Como habíamos mencionado, el conjunto de canastas posibles para consumo X es un subconjunto de $\mathbb{R}^L$. En adelante simplemente asumiremos que $X = \mathbb{R}^L_+$. En concreto, en muchos ejemplos asumiremos que $X = \mathbb{R}^2_+$. Esto es, los agentes podrán comprar cualquier cantidad de un producto que se encuentre en los reales no negativos (de cero para arriba).

1.2 Preferencias

El segundo requisito fundamental para esta teoría del consumidor es que los agentes tienen un ordenamiento binario de sus preferencias. Regresando a nuestro ejemplo anterior con las canastas $x = (1, 6)$ y $x' = (8, 4)$, podemos preguntar qué canasta prefiere un agente. La relación de preferencias de un agente la denominamos $\succeq$, y decimos que $x \succeq y$ si la canasta x es al menos tan buena como la canasta y para el agente.[1] Esta relación de preferencias se establece de manera binaria y es un primitivo de nuestra teoría: asumimos que estas preferencias están dadas, y para nuestros fines, son inalterables.

En general, tomamos como axioma que las preferencias satisfacen tres propiedades fundamentales que se listan a continuación.

Decimos que una relación de preferencias $\succeq$ son:

- **Reflexivas** si, para toda $x \in X$, $x \succeq x$. Esto es, x es al menos tan bueno como x. Si bien suena absurdo, establecerlo desde ahora permite posteriormente (aunque no trataremos aquí) excluir ciertas relaciones extrañas.
- **Completas** si, para toda $x \in X$ y toda $y \in X$, o $x \succeq y$ o $y \succeq x$ (o ambas). Esta condición establece que los individuos pueden cumparar cualesquiera pares de canastas, señalando si alguna es preferida a otra, o si son indiferentes entre ambas. Este supuesto es bastante fuerte, pues asume que los consumidores conocen perfectamente los bienes que están comparando.
- **Transitivas** si, para toda $x, y, z \in X$, si $x \succeq y$ y $y \succeq z$, entonces $x \succeq z$. Este supuesto parece un poco menos fuerte, pues parecería lógico que si preferimos una rebanada de pizza a una hamburguesa, y una hamburguesa a un sandwich, por tanto deberíamos preferir una pizza a un sandwich. Esto no siempre es el caso, y las preferencias no transitivas son más comunes de lo que parecen. Otra vez, asumiremos por el bien de nuestro modelo que esto es el caso.

Estos supuestos son muy fuertes, y para muchos estudiantes de economía podrán parecer irreales. No obstante, estos supuestos son sencillos de manejar, aunque existen diversos otros modelos para analizar conductas que podrán parecer irracionales. Asimismo, este modelo permite sentar una base respecto de la cual podemos empezar a romper supuestos, construir nuevos modelos y derivar nuevas conclusiones.

Ahora bien, podemos definir $x \succ y$ (x es estrictamente preferido a y) si $x \succeq y$, pero $y \not\succeq x$. Asimismo, definimos $x \sim y$ (x es equivalente a y si $x \succeq y$ y $y \succeq x$.

Si suponemos reflexividad, completitud y transitividad de $\succeq$, entonces $\succ$ y $\sim$ llevan también algunas propiedades deseables que no probaremos ahora, pero que enunciaremos:

- $\succ$ es **asimétrico**: Si $x \succ y$, entonces $y \not\succ x$.

[1] Notemos que esta relación de preferencias es débil, pues no quiere decir que el individuo prefiera x a y, sino que puede suceder que el agente sea indiferente entre x y y.

- $\succ$ es **negativamente transitivo**: Si $x \succ y$ y $x \neq z \neq y$, o $z \succ y$ o $z \succ x$.
- $\succ$ es **transitiva**: Si $x \succ y$ y $y \succ z$, entonces $x \succ z$.
  En particular, también es el caso que si $x \succ y$ y $y \succeq z$, entonces $x \succ z$.
- $\sim$ es **reflexiva**: $x \sim x$ para toda x.
- $\sim$ es **simétrica**: si $x \sim y$, entonces $y \sim x$.
- $\sim$ es **transitiva**: si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Ahora bien, podemos representar estas preferencias en nuestro plano cartesiano para el caso de que $X = \mathbb{R}^2$. La manera en la que representamos las preferencias es, tomar una canasta inicial x e identificar todas las demás canastas x' tal que $x \sim x'$. Una vez que las identifiquemos, las unimos con una línea. En la siguiente gráfica podemos ver todas las canastas que le son indiferentes al individuo:

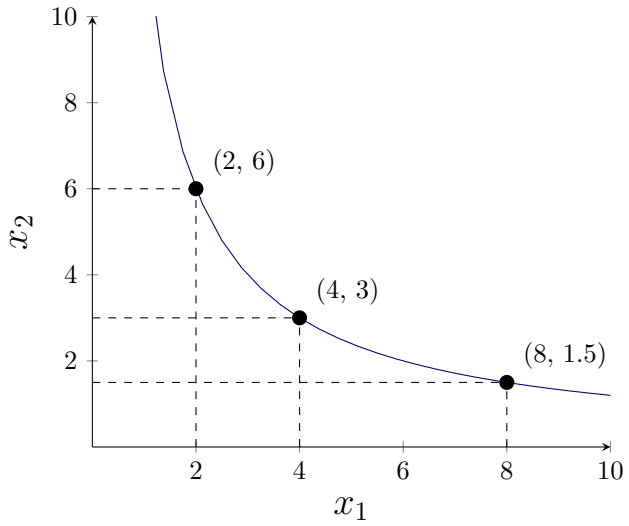


Figure 1.2: Canastas entre las cuales el individuo está indiferente.

La manera de interpretar esta gráfica es que el individuo está indiferente entre las canastas $(2, 6)$, $(4, 3)$ y $(8, 1.5)$. Estas líneas se conocen como **curvas de indiferenciea**, pues unen sólo canastas entre las cuales el individuo es indiferente. Aquí únicamente representamos un nivel de indiferencia, pero podríamos haber puesto más líneas.

Llamamos **curva de indiferencia** respecto a x a la representación gráfica de todas las canastas que son indiferentes a x, esto es, $\{x' \in X : x' \sim x\}$

En la figura 1.3 se presentan dos gráficas con dos curvas de indiferencia cada una. En la gráfica de la izquierda podemos notar que las curvas de indiferencia se cruzan. Esto es muy problemático. ¿Por qué? Recordemos la definición de curva de son todas las canastas que son indiferentes entre ellas. En el caso de la gráfica en la figura (1.3) a la izquierda, tenemos que en la curva sólida, $(2, 6) \sim (4, 3)$, mientras que en la curva punteada, tenemos que $(4, 3) \sim (7, 1)$. No obstante, como $(1, 6)$ y $(7, 1)$ están en distintas curvas de indiferencia, por definición el agente no es indiferente entre ellas (tiene alguna preferencia fuerte). Esto es violatorio de la propiedad de transitividad.

En la gráfica a la derecha, las dos curvas de indiferencia no se cruzan. Esto dice que, si las preferencias son completas, o $(2, 6) \succ (8, 3.1)$ o $(8, 3.1) \succ (2, 6)$. ¿Cómo sabemos cuál es el caso? En general, incluimos una flecha en dirección del crecimiento de las preferencias (las canastas a las que apunta la flecha son preferidas sobre las que están atrás de las mismas).

Notemos que hemos dibujado únicamente líneas hasta ahora. ¿Es posible dibujar áreas? Sí, es posible (aunque pierde el punto llamarlas curvas). En la gráfica a continuación, se muestra un área en donde todas las canastas en el área sombreada son indiferentes entre sí.

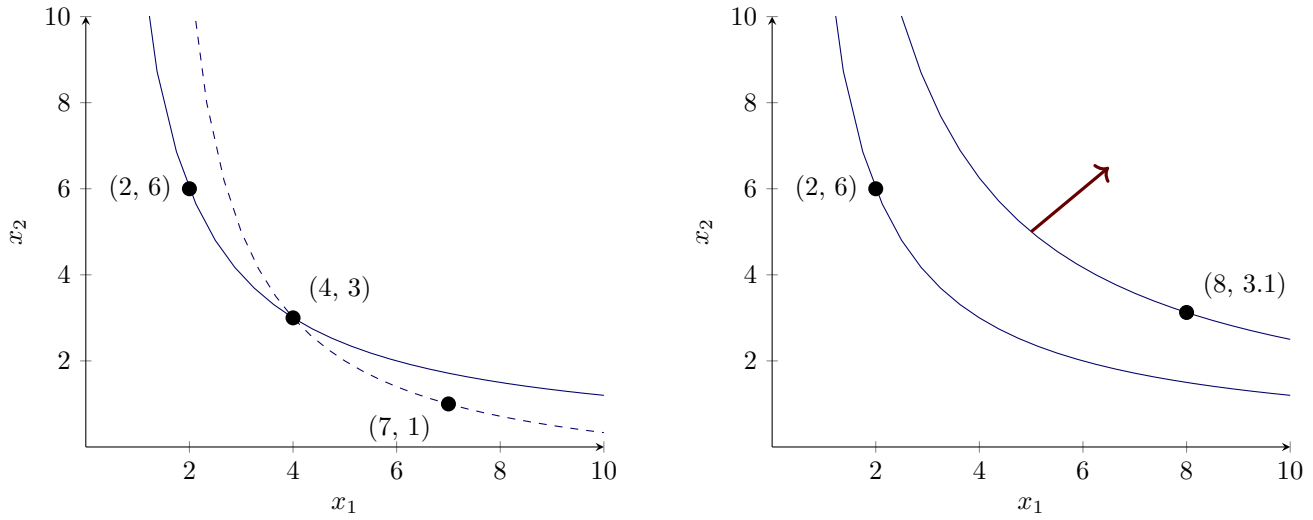


Figure 1.3: Transitividad y completitud de las preferencias.

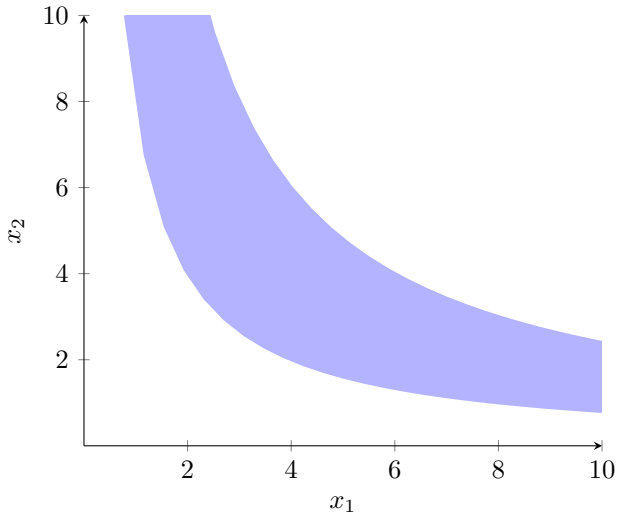


Figure 1.4: Preferencias con saciabilidad local: curvas de indiferencia "gruesas".

En general, ésto no nos gusta, pues genera diversos problemas cuando queremos encontrar la canasta que un agente elegirá entre todas las posibles. Introduciremos tres nuevos conceptos:

Propiedades de monotonicidad

- Decimos que una relación de preferencias es **localmente no saciable** si para toda $x \in X$ y para toda $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $||y - x|| \leq \varepsilon$ y $y \succ x$. Esto es lenguaje muy elaborado para decir que para cada canasta que nos imaginemos x, existe una canasta suficientemente cercana y tal que la canasta y es preferida a x.
- Dedimos que una relación de preferencias es **monótona** si para toda $x, y \in X$ tal que $y \gg x$ (todos los elementos de y son mayores que en x, es decir, $y_i > x_i$ para toda i), $y \succ x$. Esto quiere decir que si, partiendo de x, aumentamos la cantidad de todos los bienes, aunque sea por cantidades muy pequeñas, el agente preferirá la nueva canasta incrementada a la anterior.
- Decimos que una relación de preferencias es **estríctamente monótona** si para toda $x, y \in X$ tal que $y \geq x$ con $y \neq x$(esto es, $y_i \geq x_i$ para toda i, y además $y_i > x_i$ para alguna i), entonces $y \succ x$.

Esto quiere decir que partiendo de x, si aumentamos la cantidad de aunque sea un sólo bien, por una cantidad por pequeña que sea, el agente prefiere esta nueva canasta incrementada a la anterior.

De las definicionens anteriores es intuitivo concluir que toda relación de preferencias estrícta mente monótona es (débilmente) monótona, y toda relación de preferencias (débilmente) monótona es localmente no saciable. No obstante, se deja al lector corroborar lo anterior mediante una prueba formal.

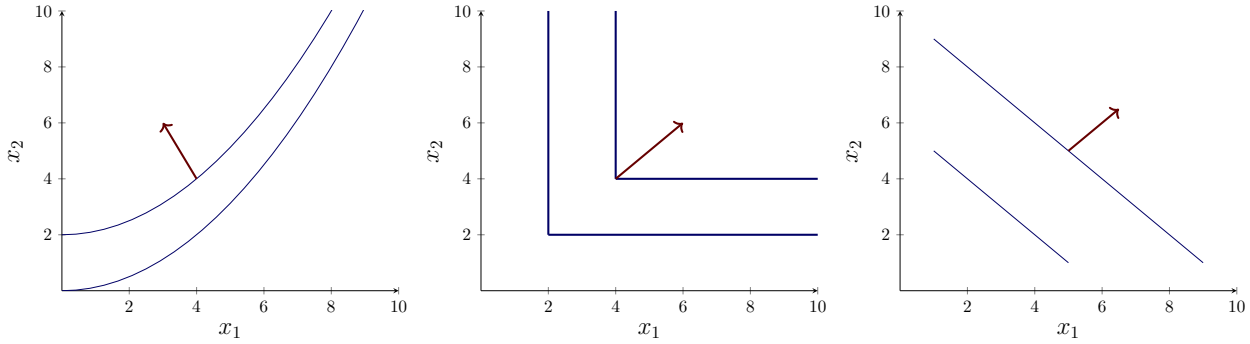


Figure 1.5: Preferencias localmente no saciables, monótonas y estrícta mente monótonas.

En la figura 1.5 gráfica a la izquierda, la relación de preferencias es localmente no saciable (para cada punto, hay un lugar al que nos podemos mover para aumentar la utilidad) , pero no es monótona puesto que aumentar la cantidad del bien x_1 llegamos a canastas que estrictamente menos preferidas. La gráfica al centro muestra una relación de preferencias monótona, aunque no estrictamente. Podemos notar que, partiendo del punto en el vértice, si aumentamos la cantidad de ambos bienes llegamos a canastas estrictamente preferidas, pero si aumentamos únicamente x_1 o x_2, continuamos en la misma curva de indiferencia. En la tercera gráfica mostramos curvas de utilidad que son estrícta mente monótonas, puesto que aumentar cualquiera de los bienes, a partir de cualquier punto, resulta en una canasta estrícta mente preferida. Las preferencias localmente no saciables excluyen casos de "curvas de indiferencia gruesas" como en la figura (1.4). Las curvas de indiferencia al centro representan preferencias del tipo **complementos perfectos o Leontieff**, mientras que las de la derecha representan preferencias del tipo **sustitutos perfectos**. Tocaremos esto nuevamente más adelante.

La mayoría de los modelos con los que trataremos tendrán preferencias monótonas (débil o estrictamente). No obstante, en realidad sólo basta asumir no saciabilidad a nivel local, y si las preferencias crecen mediante la disminución de un bien, podemos considerar en su lugar el negativo de dicho bien para obtener preferencias monótonas. El ejemplo clásico son los agentes con preferencias por bienes de consumo y horas de trabajo. En el modelo, las horas de trabajo son un "mal", en el sentido de que, si fijamos la cantidad de unidades de consumo, aumentar las horas de trabajo resulta en canastas menos preferidas. Estas preferencias serían localemnte no saciables, pero no monótonas. En lugar de horas de trabajo, podemos considerar su negativo, u "horas de ocio" (cada hora que no trabajas se puede considerar una hora dedicada al ocio). En este sentido, las preferencias por consumo y ocio serán monótonas.

En adición a las preferencias no sacibles, los economistas tratamos frecuentemente con preferencias convexas.

Preferencias Convexas

- Una relación de preferencias $\succeq$ es **convexa** si, para toda $x, y, z \in X$ tal que $y \succeq x$ y $z \succeq x$, y para cualquier $\alpha \in (0,1)$, entonces $\alpha y + (1-\alpha)z \succeq x$.
- Una relación de preferencias $\succeq$ es **estrictamente convexa** si, para toda $x, y, z \in X$ tal que $y \succeq x$ y $z \succeq x$, y para cualquier $\alpha \in (0,1)$, entonces $\alpha y + (1-\alpha)z \succ x$.

La convexidad nos dice que si "promediamos" dos canastas que sean al menos tan buenas como x (en este caso, promediamos y y z, ambas al menos tan buenas como x), entonces esta canasta "promedio" es al menos tan buena como x. En particular, si tomamos dos canastas sobre la misma curva de indiferencia y dibujamos una línea recta que las una ("promediar"), dicha línea recta pasará por canastas que el agente prefiera, o al menos para las cuales el

agente es indiferente. En la figura 1.6, asumamos que las preferencias son monótonas (crecen hacia afuera). Vamos a dibujar líneas entre cualesquiera dos puntos sobre una misma curva de indiferencia. Si es posible siempre dibujar dichos puntos tal que la línea pase por puntos estrictamente preferidos, entonces las preferencias son estrictamente convexas. Si es posible dibujar la línea de tal forma que nunca pase por puntos estrictamente menos preferidos (es decir, que sean o preferidos, o que el agente esté indiferente), entonces las preferencias son convexas. Si es posible dibujar al menos una línea que pase por puntos estrictamente no preferidos, entonces las preferencias no son convexas. Cabe resaltar que las preferencias, o son convexas (o estrictamente convexas), o no lo son; no existe una definición de preferencias cóncavas.

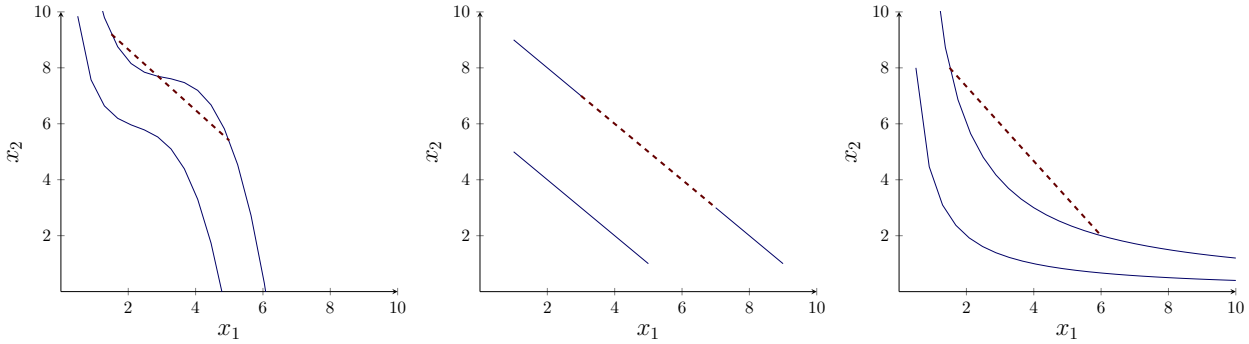


Figure 1.6: Preferencias no convexas, débilmente convexas, y estríctamente convexas.

Notemos en la Figura 1.6, en la gráfica a la izquierda la línea que une dos puntos sobre la misma curva de indiferencia pasa por un punto que es estrictamente menos preferido, por lo que las preferencias no son convexas. En la gráfica de enmedio, la línea pasa por puntos que no son estrictamente menos preferidos (indiferentes o preferidos), por lo que las preferencias son convexas. En la gráfica a la izquierda, la línea pasa únicamente por canastas estrictamente preferidas, por lo que las preferencias son estrictamente convexas.

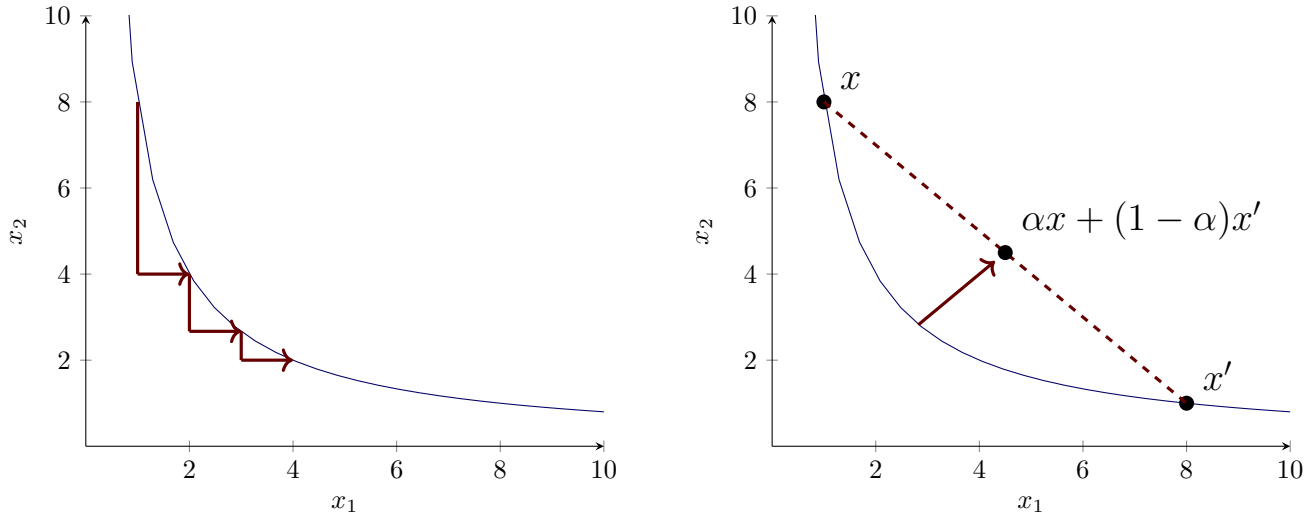


Figure 1.7: Interpretación de las preferencias convexas.

¿Por qué nos interesan las preferencias convexas? Hay dos interpretaciones útiles:

- La primera interpretación es la de rendimientos marginales decrecientes. En la figura 1.7 a la izquierda se ilustra esto. Vemos que la primera unidad de x_1 el agente está dispuesto a sacrificar varias unidades de x_2. No obstante, conforme el consumo de x_1 aumenta, el individuo está cada vez menos deseoso de sacrificar tantas unidades de x_2 por unidades adicionales de x_1.
- La segunda interpretación, muy de la mano con los rendimientos marginales decrecientes, tiene que ver con **preferencias balanceadas**. Es decir, si un individuo se encuentra en extremos, va a preferir acercarse a un

punto medio. Un ejemplo son las preferencias por alimentos, en que la gente tiende a preferir balancear su ingesta entre diversos alimentos a consumir exclusivamente uno o dos alimentos (una sopa, una ensalada y un plato fuerte es preferido a consumir sólamente sopa). Esto se ejemplifica en la figura 1.7 a la derecha.

Finalmente, dos propiedades con las que pueden contar las preferencias y que son de gran utilidad en el problema de extraer las preferencias a partir de la demanda son las de homoteticidad y cuasilinealidad.

- La relación de preferencias $\succeq$ sobre $X \subseteq \mathbb{R}^L$ son homotéticas si cada que $x \sim y$, entonces $\alpha x \sim \alpha y$ para toda $\alpha \geq 0$. Esto quiere decir que si tomamos dos canastas x y y sobre la misma curva de indiferencia, y ambas las multiplicamos por la misma **proporción** $\alpha \geq 0$, las canastas resultantes seguirán en la misma curva de indiferencia.
- La relación de preferencias $\succeq$ sobre $X \subseteq \mathbb{R}^L$ son **cuasillineales respecto del bien 1** (al cual llamamos el numerario) si:
  1. Todas las curvas de indiferencia son desplazamientos paralelos sobre el eje del bien 1. Esto es, si $x \sim y$, entonces $(x + \alpha e_1) \sim (y + \alpha e_1)$ para toda $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.
  2. El bien 1 es deseable, esto es, $(x + \alpha e_1) \succ x$.

  Esto quiere decir que si tomamos dos canastas sobre la misma curva de indiferencia, y en ambas aumentamos la cantidad del bien numerario 1 en la misma **cantidad**, las canastas resultantes estarán en la misma curva de indiferencia.

La propiedad de homoteticidad relaciona canastas equivalentes ante cambios proporcionales en todos los bienes, mientras que la propiedad de cuasilinealidad relaciona canastas equivalentes ante cambios absolutos en el bien numerario. Asumir estas propiedades permite inferir la forma de todas las curvas de indiferencia a partir de una sola.

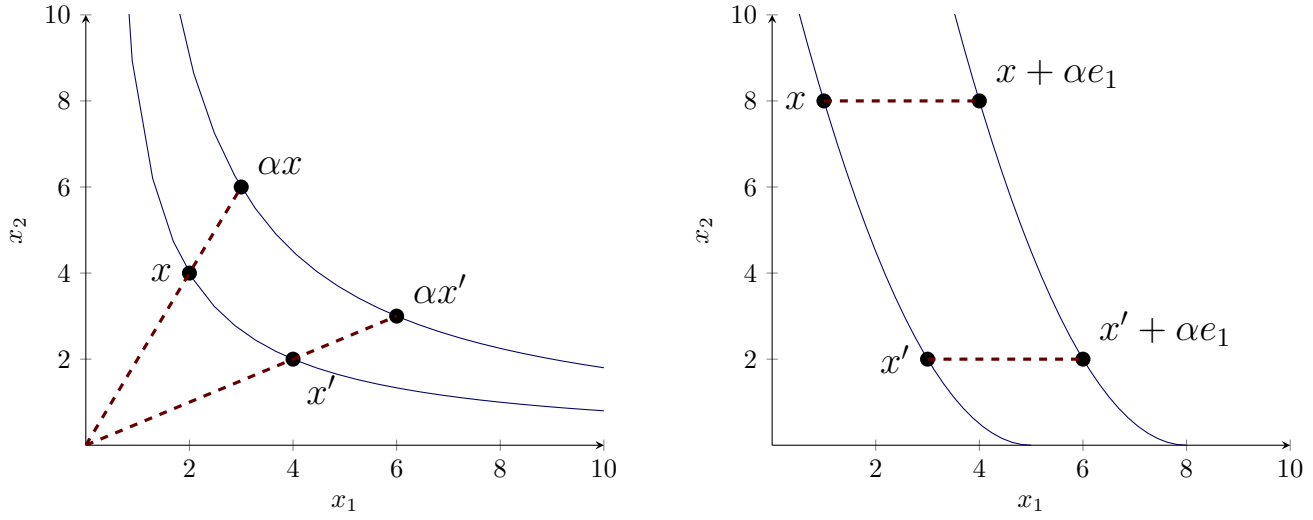


Figure 1.8: Preferencias homotéticas y cuasilineales.

Antes de terminar esta sección cabe señalar que las propiedades de no saciabilidad local (o monotonicidad débil o estricta) no implican las propiedades de convexidad (débil o estricta) ni viceversa. Igualmente, las propiedades de homoteticidad o cuasilinealidad no implican convexidad, ni viceversa (aunque por definición las preferecias homotéticas sí son monótonas). Un ejercicio interesante es dibujar curvas de indiferencia que satisfagan alguna de estas propiedades, pero violen las otras.

1.3 La restricción presupuestal

Hasta ahora hemos considerado únicamente las preferencias del consumidor. Es trivial señalar que la decisión del consumidor consistirá en elegir una canasta que sea preferida a todas las demás. Es decir, la "mejor" canasta entre todas las posibles es $\{x : x \succeq x', \forall x, x' \in X\}$. Este problema del consumidor no está bien definido, pues recordemos que $X = \mathbb{R}^L$. Si las preferencias del consumidor son monótonas, entonces para cualquier canasta que elijamos, siempre podemos aumentar el consumo de todos los bienes y llegar a una nueva canasta estrictamente preferida.

Si bien lo anterior presenta un problema matemático, el problema económico también es que los individuos no pueden consumir una cantidad infinita de bienes, pues están sujetos a restricciones. Por ejemplo, un individuo no puede decidir ver televisión por 25 horas al día, puesto que sólo tiene 24 horas disponibles cada día. De entre todas las restricciones, la que consideramos más importante es la restricción presupuestal, que señala que el gasto no puede superar a la riqueaza o al ingreso disponible.

Definimos el precio del bien x_i como p_i, y al vector de precios de todos los bienes como $p = (p_1, \ldots, p_L)$. Asimismo, denotamos al ingreso como w. El **conjunto presupuestal** está dada por:

$$\sum_{i=1}^{L} p_i x_i \leq w$$

Alternativamente, en forma vectorial, decimos que $p \cdot x \leq w$. Considerando además que asumimos que el vector de consumo x está en los reales no negativos, cuando $L = 2$ podemos representar la restricción presupuestal está dada por

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$$

Gráficamente:

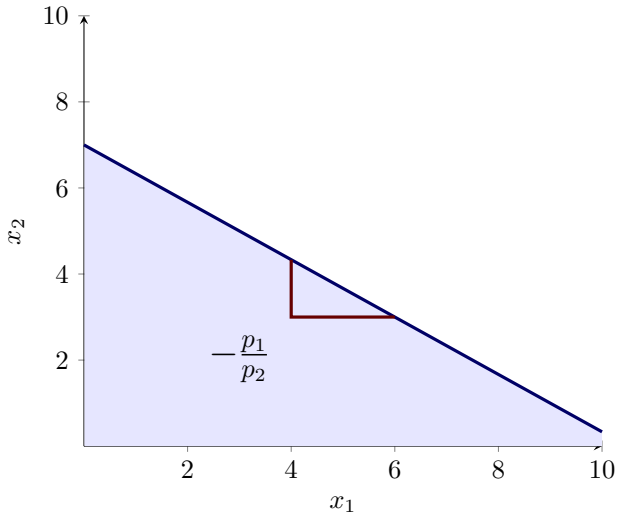


Figure 1.9: Preferencias con saciabilidad local: curvas de indiferencia "gruesas".

El conjunto presupuestal abarca toda el área sombreada, mientras que la restricción presupuestal es la línea recta en la frontera, $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$. Basta un poco de álgebra para demostrar que la pendiente de la restricción presupuestal es el negativo de p_1/p_2, lo cual denotamos como los precios relativos. Esto es de particular interés, pues el interés del consumidor estará en los precios relativos, y no en los precios absolutos, lo cual nuevamente se relaciona con la ilusión del dinero. En particular, despejando la restricción presupuestal, obtenemos:

$$x_2 = \frac{w}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

en donde

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

Los precios relativos determinan la tasa de cambio entre bienes que me da el mercado. A manera de ejemplo, si los precios están dados por $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$, los precios relativos son igual a $2/3$. Esto es $\Delta x_2/\Delta x_1 = -3/2$. En palabras, por cada tres unidades adicionales del bien x_1 desee adquirir el agente, el mercado le pide que sacrifique (deje de comprar) dos unidades del bien x_2. Este sacrificio es el costo de oportunidad de consumir una unidad adicional del bien x_2 en términos del bien x_1.

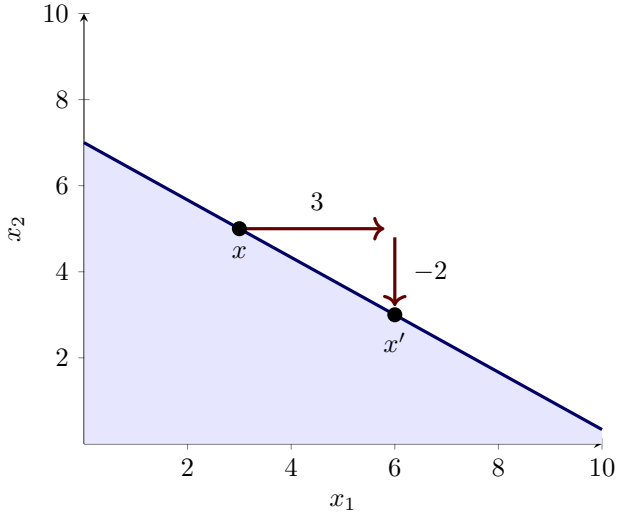


Figure 1.10: Precios relativos y costo de oportunidad.

Esta interpretación no se limita al caso de dos bienes. Siempre y cuando la restriccion presupuestal sea de la forma $\sum_i p_i x_i \leq w$, los precios relativos entre cualesquiera dos bienes j y k, p_j/p_k se interpretan como una tasa de cambio en el mercado entre los bienes x_k y x_j (esto es, p_j/p_k dice cuantas unidades de x_k tengo que sacrificar por una unidad adicional de x_j).

Pese a que esta interpretación no es tan intuitiva, es fácil si lo pensamos también en los términos de los precios relativos. Si $p_j = 3$ y $p_k = 6$, cada unidad que deje de comprar de x_k me ahorra \$6; si estos \$6 los uso para comprar x_j a \$3 por unidad, me alcanza para dos unidades de x_j. Los precios relativos son $p_j/p_k = 1/2$, esto es, si quiero una unidad adicional de x_j, sólo tengo que sacrificar media unidad de x_k.

Antes de continuar, consideremos qué pasa con la restricción presupuestal ante cambios proporcionales en los precios y el ingreso. En particular, todos los precios y el ingreso cambian por un factor de $\lambda > 0$. Entonces la restricción presupuestal cambia a:

$$\sum_{i=1}^{L} \lambda p_i x_i \leq \lambda w$$

No obstante, como λ es positivo, podemos cancelarlo de ambos lados de la desigualdad, por lo que la restricción presupuestal no cambia ante cambios proporcionales en los precios y el ingreso. A esto es a lo que le denominamos la ilusión del dinero: los consumidores no se preocupan en los precios por su valor absoluto, sino por su valor relativo a otros bienes que puedan comprar. A manera de ejemplo, un consumidor que está considerando comprar un auto nuevo, no se preocupa por el precio absoluto del auto, sino por cuánto representa este precio como proporción de su ingreso, y los bienes que el agente deja de comprar con tal de comprar el vehículo.

La restricción presupuestal, junto con las condiciones de no negatividad definen el conjunto presupuestal. Esto es, todas las canastas que son técnicamente y económicamente factibles (están disponibles en el mercado y además le alcanza el dinero al agente para comprarlas).

1.4 Axioma Débil y Fuerte de las Preferencias Reveladas

A la vez que se estaba generando la teoría del consumidor con base en las preferencias binarias descrito anteriormente, Samuelson y otros economistas estaban desarrollando una teoría basada en la elección. Esto es, en vez de racionalizar la conducta con base en las preferencias, que no son observables por los economistas, se buscaba racionalizar la conducta con base en las elecciones observadas. Esta sección escapa en general a los cursos de microeconomía intermedia, pero se incluye por su importancia en la literatura económica, y porque permite dar un poco de intuición sobre cómo entendemos el comportamiento de los consumidores.

Una vez más, esta es una teoría distinta a lo que vimos en las partes anteriores de la sección, por lo que parte de su propio conjunto de supuestos. Olvidemos los supuestos anteriormente descritos para la teoría de la maximización de utilidad, y asumamos que, hasta ahora, únicamente contamos con la relación binaria de preferencias definida anteriormente, y queremos realizar inferencia de las preferencias del consumidor a partir de su comportamiento (como economistas, no observamos las preferencias, pero sí la conducta de los consumidores). Así, la teoría de las preferencias reveladas, y se basa en la idea de que si un agente tiene a su disposición un conjunto de canastas $B(p) \subseteq \mathbb{R}^L$, y elige una canasta $x \in B(p)$, entonces x es al menos tan buena como cualquier otra canasta en $B(p)$: $\forall\, y \in B(p)$, $x \succeq y$. Esto lo tomamos como un axioma y no como un resultado de nuestro modelo.

En particular, supongamos que para cada nivel de precios e ingreso, (p, w), el agente elige una única canasta que consumir, la cual denotamos $x(p, w)$:

$$x(p,w) = \begin{pmatrix} x_1(p,w) \\ x_2(p,w) \\ \vdots \\ x_L(p,w) \end{pmatrix}$$

A esto le llamamos función de demanda Walrasiana(función puesto que asumimos que, para cada nivel de precios e ingreso, el agente elige una única canasta). La diferencia entre las demandas Walrasianas y las Demandas Marshalianas es que las demandas Marshalianas se derivan de un problema de maximización de utilidad, y como tal, cuentan con las propiedades anteriormente descritas. Por su parte, las demandas Walrasianas sólo necesitan cumplir con dos propiedades. La primera es que dicha función de demanda es homogénea de grado cero en los precios e ingreso. Esto es, para cualquier $\lambda > 0$,

$$x(\lambda p, \lambda w) = x(p, w)$$

En segundo lugar, la Demanda Walrasiana satisface la Ley de Walrás:

$$p \cdot x(p,w) = \sum_{l=1}^{L} p_l x_l(p,w) = w \tag{1.1}$$

Axioma débil de las preferencias reveladas
Asumamos que los agentes cuentan con una función de demanda (y no correspondencia), que la función de demanda es homogénea de grado cero en precios e ingreso, y que los agentes agotan su ingreso. El axioma débil de preferencias reveladas dice que si

$$p \cdot x(p', w') \leq w \quad \text{y} \quad x(p,w) \neq x(p',w')$$

entonces

$$p' \cdot x(p,w) > w'$$

Vamos por partes. Primero, supongamos dos niveles de precios e ingreso diferente, (p, w) y (p', w'). Estos dos niveles de precios se representan al lado izquierdo de la figura 1.11, con la línea sólida representando la restricción presupuestal en (p, w), y la punteada la restricción presupuestal en (p', w'). La primera parte del axioma débil de preferencias reveladas nos dice que, cuando los precios son (p', w'), el agente elige una canasa que está al interior

de la restricción presuputesal en (p, w), pero sobr. Esto lo representamos a la derecha de la gráfica 1.11: notamos que $x(p', w')$ está sobre la restricción presupuestal al nivel de precios correspondiente (línea verde punteada), pero adentro $p \cdot x(p', w') \leq w$, es decir, $x(p', w')$ es costeable al nivel de precios (p, w).

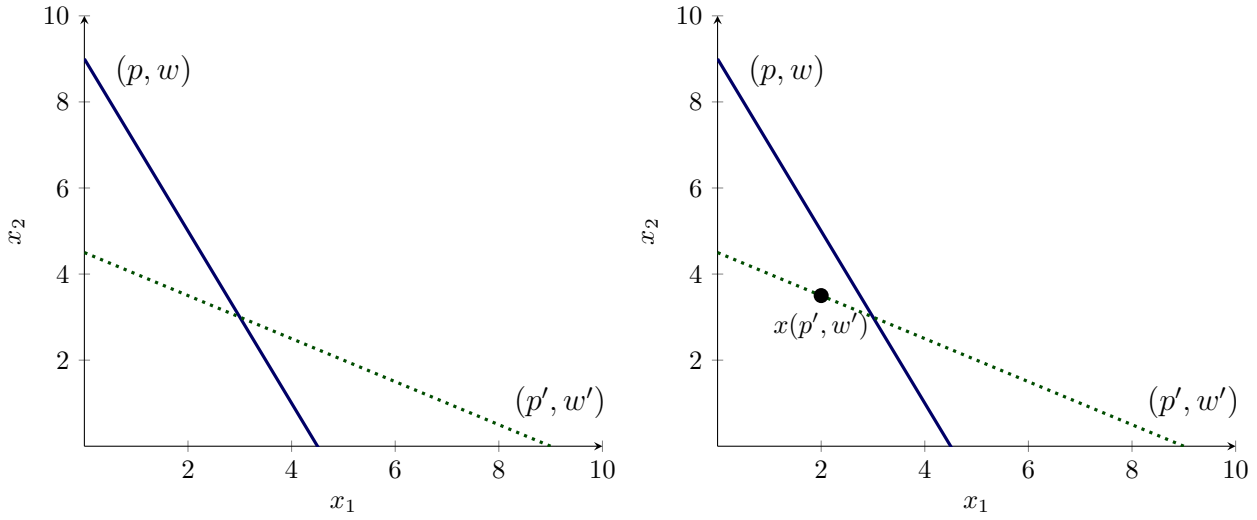


Figure 1.11: Axioma débil de preferencias Reveladas

Asimismo, el axioma nos dice que $x(p, w) \neq x(p', w')$. Ahora, como $x(p', w')$ es costeable cuando los precios son (p, w), pero el agente no elige aquella canasta a este nivel de precios, debe ser porque $x(p, w)$ es preferida a $x(p', w')$. Pero si $x(p, w)$ es preferida a $x(p', w')$, y el agente no compra $x(p, w)$ cuando los precios son (p', w'), debe ser porque la canasta no es costeable a dichos precios. Gráficamente, esto quiere decir que $x(p, w)$ tiene que estar sobre la línea sólida azul, pero para afuera de la línea punteada verde. Esto se representa en la gráfica 1.12 a la izquierda.

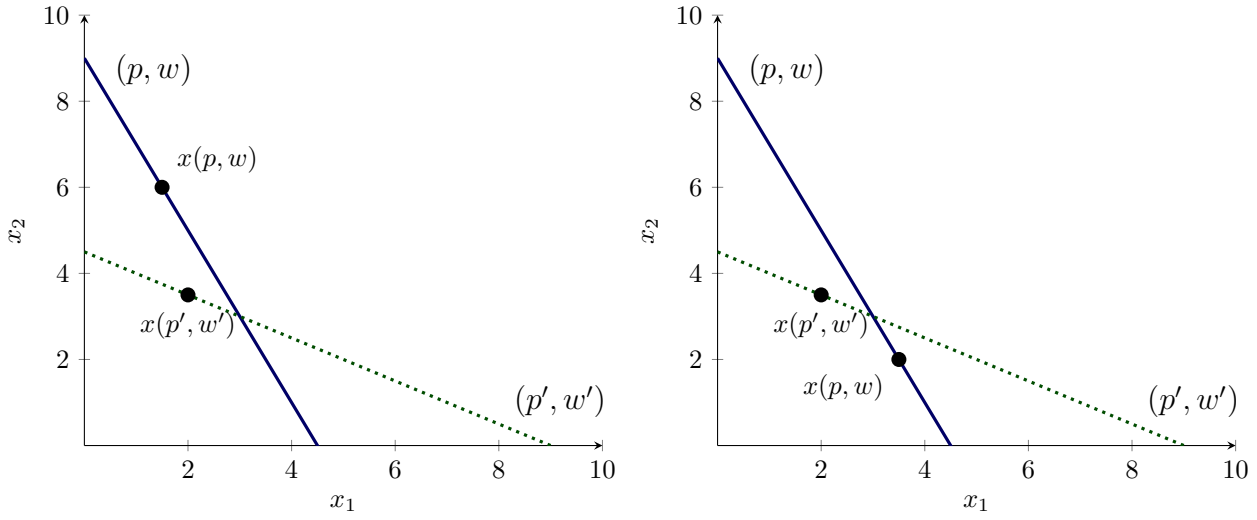


Figure 1.12: Axioma débil de preferencias Reveladas

Es más sencillo entender este axioma si se explica al revés. Nuevamente en la gráfica 1.12, notemos que si al individuo le alcanza para comprar $x(p, w)$, entonces también le alcanza para comprar $x(p', w')$, esto es, el punto $x(p', w')$ se encuentra dentro de restricción presupuestal de (p, w):

$$p \cdot x(p', w') \leq w$$

Asimismo, vemos que las canastas son distintas, $x(p, w) \neq x(p', w')$. Así, el agente, pudiendo comprar $x(p', w')$ a los precios (p, w), no lo hace, por lo que revela que $x(p, w)$ es preferida a $x(p', w')$. Entonces, ¿por qué $p' \cdot x(p, w) >$

w'? Veamos qué pasaría si no fuera así. En el lado derecho de la figura 1.12, dibujamos el caso: $p' \cdot x(p,w) \leq w'$. Entonces si los precios son (p', w'), el agente elige $x(p', w')$, y además le alcanzaría para comprar $x(p,w)$, por lo que $x(p', w')$ debe ser preferida a $x(p,w)$. No obstante, cuando los precios son (p,w), el agente elige $x(p,w)$ y además $x(p', w')$ es costeable, por lo que $x(p,w)$ debe ser preferida a $x(p', w')$, lo cual lleva a una contradicción.

¿Qué ocurre si $p \cdot x(p', w') > w$? En este caso, el axioma fuerte no nos dice nada sobre el ordenamiento de preferencias de los consumidores. En la gráfica 1.13 se ilustra lo anterior. Dado que $x(p', w')$ no es costeable cuando los precios son (p,w), ni $x(p,w)$ es costeable cuando los precios son (p', w'), no existe punto de comparación entre ambas canastas, y el axioma débil no nos dice nada sobre el ordenamiento de preferencias de los consumidores. Este caso en particular no viola el axioma débil de preferencias reveladas al no satisfacer la primera de sus condiciones. Por tal motivo, de estos dos puntos decimos que el consumidor satisface el axioma débil de manera trivial.

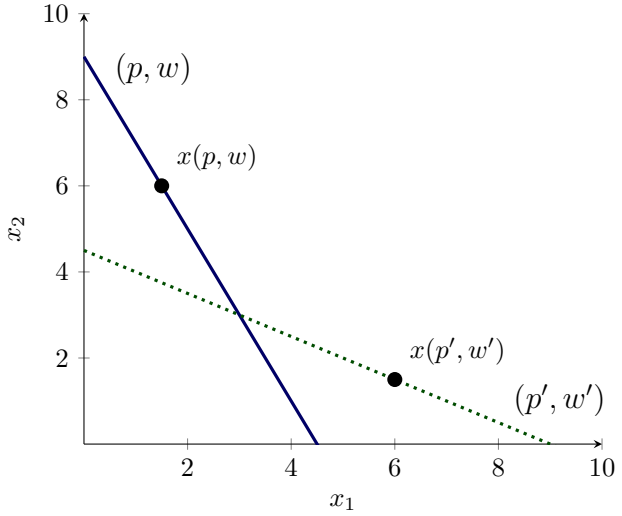


Figure 1.13: Satisfacción (izquierda) y violación (derecha) del Axioma Débil de Preferencias Reveladas

El axioma débil de preferencias reveladas es un axioma de consistencia en el comportamiento de los agentes. No obstante, es un axioma muy débil (como su nombre lo indica), y resulta en violaciones a supuestos razonables sobre las preferencias. Un ejemplo dado por Hicks, que no incluiremos pues escapa al alcance de estas notas, muestra que el axioma débil no es incompatible con preferencias que no son transitivas; Hicks da un ejemplo en el que, para 3 bienes, $x \succ y$, $y \succ z$, pero $z \succ x$.

Houthakker en 1950 propuso un axioma distinto, denominado axioma fuerte de preferencias reveladas, para evitar este tipo de inconsistencias, el cual enuncio a continuación en la forma en que lo presentan Mas-Colell, Whinston y Green.

Axioma fuerte de las preferencias reveladas
La función de demanda del mercado $x(p,w)$ satisface el axioma fuerte de las preferencias reveladas si, para cada lista de precios

$$(p^1, w^1), (p^2, w^2), \ldots, (p^N, w^N)$$

tal que $x(p^{n+1}, w^{n+1}) \neq x(p^n, w^n)$ para $n = 1, \ldots, N-1$, si

$$p^n \cdot x(p^{n+1}, w^{n+1}) \leq w^n \quad \text{para } n = 1, \ldots, N-1$$

entonces

$$p^N \cdot x(p^1, w^1) > w^N.$$

En palabras, este axioma le da la vuelta al problema de ciclicidad que encontró Hicks, justamente imponiendo que si un agente revela que prefiere $x(p,w)$ a $x(p', w')$, entonces no pueda revelar que $x(p', w')$ es preferida a $x(p,w)$. Este axioma implica el axioma débil, esto es, si la conducta de un agente satisface el axioma fuerte de preferencias reveladas, entonces satisface el axioma débil. En particular, para el caso de dos bienes $L = 2$, el axioma fuerte es

equivalente al axioma débil.

2 La función de utilidad

La parte anterior la cerramos con la teoría de las preferencias reveladas, esto es, una teoría que racionaliza la conducta de los consumidores únicamente a partir de la observación de sus preferencias. Esta teoría era muy limitada en su alcance y predicciones. A continuación nos enfocaremos más en la teoría de la utilidad, la cual es el fundamento de la economía neoclásica.

En esta parte, hablaremos sobre la existencia de la función de utilidad: esto es, si existe una función $u : X \to Y$, con $X \subseteq \mathbb{R}^L$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$, tal que $x \succ y$ si y sólo si $u(x) > u(y)$. En los cursos de microeconomía intermedia de nivel licenciatura, comúnmente asumimos que existe una función de utilidad. Aquí hablaremos brevemente de las restricciones sobre las preferencias tal que dicha función existe. No obstante, se puede dejar de lado.

El problema del consumidor consiste en encontrar la canasta preferida entre todas las disponibles, y que son factibles dada su restricción presupuestal (gasto menor al ingreso). Entraremos más a detalle de esto en la siguiente sección. Por ahora, bastará ver que tenemos un problema con encontrar la mejor canasta. La manera en que definimos la relación de preferencias, como un comparativo binario, requeriríamos ir canasta por canasta costeable al agente, y comparar cada una de estas con todas las demás. Este se vuelve un problema imposible si consideramos que si bien el número de bienes es finito, existe una infinidad de combinaciones de canastas que habrá que comparar una a una.

En este contexto surge el problema de la función de utilidad. Quienes estén familiarizados con cálculo habrán notado desde un inicio que la representación de las curvas de indiferencia es muy similar a la representación de las "curvas de nivel", esto es, la representación en un plano cartesiano de $\{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = c\}$. De aquí que surja la pregunta, ¿es posible representar las preferencias mediante una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $x \succ y$ si y sólo si $u(x) > u(y)$?

2.1 Continuidad de las preferencias y el Teorema de Debreu

Imaginémonos que a una cada canasta le asignamos una "calificación". Por ejemplo, la canasta consistente en un litro de leche y media dozena de huevos asignamos una calificación de $u_0 \in \mathbb{R}$, mientras que a la canasta de 8 litros de leche y 4 huevos le asingamos una calificacion de $u_1 \in \mathbb{R}$. Entonces la primera canasta es preferida débilmente a la segunda sí y sólo si $u_0 \geq u_1$. Si podemos calificar todas estas canastas de una manera rápida y sencilla, elegir la canasta óptima se vuelve muy sencillo.

El primer requisito para que exista una función de utilidad es que las preferencias sean completas. La razón es que si un individuo califica x y califica y, entonces existe $u(x)$ y $u(y)$. Pero si las preferencias no son completas, entonces ni $x \succeq y$ ni tampoco $y \succeq x$. No obstante, como u está en los reales, necesariamente o $u(x) \geq u(y)$ o $u(y) \geq u(x)$ (los números reales son completos, por lo que si las preferencias no son completas, no puede haber una función de utilidad que las represente). La siguiente condición es que las preferencias tienen que ser transitivas. El argumento es similar. Si sucede que $x \succeq y$ y $y \succeq z$, pero $x \not\succeq z$, la función de utilidad señalaría que $u(x) \geq u(y)$ y $u(y) \geq u(z)$ pero $u(x) \not\geq u(z)$. Esto es una contradicción, puesto que los números reales son transitivos. ¿Basta con transitividad y completitud para que una relación de preferencias sea representable por una función de utilidad u?

Podemos hacer unos ejercicios mentales. Si el número de canastas posibles es finito, una función de utilidad es fácil de obtener para cualquier relación de preferencias completas y transitivas. Simplemente podemos decir que la utilidad de x es el número de canastas y tal que $x \succ y$. Como el número de canastas es finito, podemos ordenar todas las canastas fácilmente. Es más, podemos demostrar (no lo haremos) que si las preferencias son completas y transitivas sobre un conjunto de bienes disponibles que es infinito pero contable, también podemos encontrar una función de utilidad que represente dichas preferencias. Entonces, ¿basta con transitividad y completitud cuando el conjunto de bienes disponibles es infinito y no contable?

No, no basta con transitividad y completitud. El ejemplo más claro es el de preferencias lexicográficas. Definimos una relación de **preferencias lexicográficas** $\succeq$ sobre $X \in \mathbb{R}^2$ como $x \succeq y$ si y sólo si $x_1 \geq y_1$ o $[x_1 = y_1$ pero $x_2 \geq y_2]$. El nombre lexicográficas deviene de "léxico", y podemos pensar en el ordenamiento de un diccionario: primero la

primera letra, si dos palabras empiezan con la misma legra, se ordenan conforme a la segunda, y así sucesivamente.[2] Las preferencias lexicográficas son más comunes de lo que pudiera parecer. El ejemplo clásico es la gente que valora la seguridad primero al comprar un automóvil. Podemos pensar que primero se va por el más seguro, si dos autos son igual de seguros, entonces se van por el rendimiento de la gasolina. Si es igual, saltan a una tercera característica.

Estas preferencias son completas, pues si $x_1 > y_1$, entonces $x \succeq y$, pero si son iguales, entonces respecto al segundo criterio, o $x_2 > y_2$ y por tanto $x \succeq y$, o son iguales y $x \succeq y$ (en particular, $x \sim y$). También son transitivas, lo cual dejamos al lector a demostrar. No obstante, es posible demostrar que estas preferencias no pueden ser representables mediante ninguna función de utilidad.

La demostración formal escapa a esta nota, pero daré aquí una breve intuición. En primer lugar notemos que si fijamos $x_1 = 1$, entonces mientras más aumentemos x_2, más preferidas serán las canastas:

$$(1,0) \prec (1,1) \prec (1,2) \prec (1,3) \prec \dots$$

Esto quiere decir que al fijar x_1, si aumentamos x_2 la función de utilidad tiene que arrojar números cada vez más grandes:

$$u(1,0) < u(1,1) < u(1,2) < u(1,3) < \dots$$

Si ahora aumentamos x_1 a $x_1 = 2$, cualquiera de estas canastas es preferible a cuando x_1 era sólo 1:

$$(1,0) \prec (1,1) \prec (1,2) \prec (1,3) \prec \dots \prec (2,0) \prec (2,1) \prec (2,2) \prec \dots$$
$$u(1,0) < u(1,1) < u(1,2) < u(1,3) < \dots < u(2,0) < u(2,1) < u(2,2) < \dots$$

Como podemos ver, esto nos genera un problema, puesto que con $x_1 = 1$ y con una infinidad de números posibles para x_2, tenemos que encontrar una infinidad de valores que asignar para $u(1, x_2)$. Aquí dimos el ejemplo de incrementos discretos, pero en realidad el cambio se hace para cambios infinitesimales. No sólo eso, sino que una vez que llenemos esos valores, tenemos que encontrar una infinidad de valores adicionales para el caso de $x_1 = 2$, tal que $u(2,0) > \lim_{x_2 \to \infty} u(1, x_2)$, así como para la infinidad de números reales que se encuentran entre $x_1 = 1$ y $x_1 = 2$. Y así sucecivamente para toda $x_1 \in \mathbb{R}$. Los estudiantes más observadores habrán visto que no existen curvas de indiferencia (o más bien, cada curva de indiferencia es un sólo punto en el plano cartesiano), pues para cada posible canasta (x_1, x_2), no existe ninguna otra en la que estén indiferentes.

Si bien lo anterior resulta en un problema, lo podríamos ignorar si no fuera porque para las preferencias lexicográficas, perturbaciones pequeñas resultan en cambios fuertes en el ordenamiento de preferencias. Pensemos en la definición de preferencias lexicográficas y en las canastas $x = (1,1)$ y $y = (1, 0.99)$. Entonces, $x \succ y$. No obstante, si alteramos tantito la canasta x a $x^{'} = (0.99, 1)$, inmediatamente $y \succ x$. Esto es, perturbaciones pequeñas en las canastas resultan en cambios grandes en el ordenamiento de las preferencias. Así, estsamos ante la necesidad de comparar infinitos sobre cambios infinitesimales.

Lo anterior no es una demostración, y pensar en infinitos en un conjunto convexo requiere de un mayor nivel de sofisticación. No obstante sirve como una forma de pensar por qué dichas preferencias no pueden ser representadas por una función de utilidad. Entonces, ¿hay alguna propiedad que las preferencias $\succeq$ deban satisfacer para que sean representables mediante una función de utilidad?

[2] Estas preferencias están definidas sobre dos dimensiones. No obstante, es fácil generalizar las preferencias lexicográficas para cualquier número arbitrario (pero finito) L.

Preferencias Continuas
Definimos a una relación de preferencias sobre un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^L$ convexo como **continua** si para toda $x, y \in X$ tal que $x \succ y$, existe una $\varepsilon > 0$ tal que para toda $x^{'} \in B_\varepsilon(x)$ (bola de radio ε con centro en x) y para toda $y^{'} \in B_\varepsilon(y)$, $x^{'} \succ y^{'}$. En otras palabras, si x es estrictamente preferida a y, **todas** las canastas suficientemente cercanas a x son preferidas estrictamente a **todas** las canastas suficientemente cercanas a y.

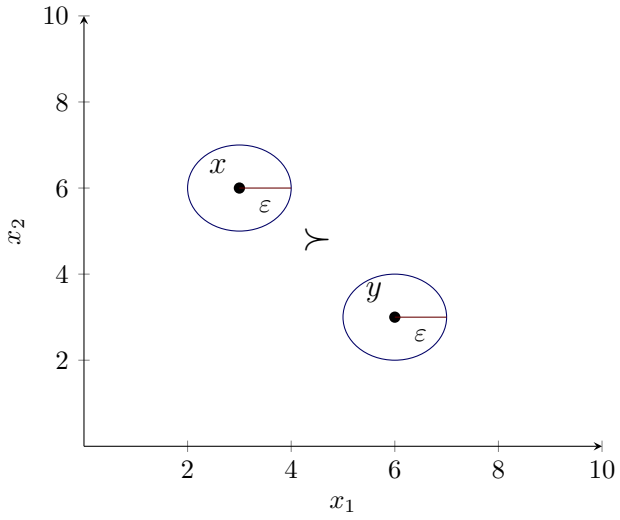


Figure 2.1: Preferencias continuas

La gráfica anterior nos dice que si $x \succ y$, entonces anque algunas canastas más cercanas a y sean preferidas a algunas canastas más cercanas a x, existe una $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña tal que **todas** las canastas dentro de una bola de radio ε centrada en x son estrictamente preferidas a **todas** las canastas dentro de una bola de radio ε con centro y. Esto evita que cambios infinitesimales en las canastas cambien el ordenamiento de preferencias.

Notemos que las preferencias lexicográficas no satisfacen la condición de continuidad, puesto que para el ejemplo que dimos $x = (1, 1)$ y $y = (1, 0.99)$, con $x \succ y$, no existe ningun valor $\varepsilon > 0$ tal que **todas** las canastas dentro del círculo de radio ε sigan manteniendo la relación de preferencias. En concreto, cualquier reducción en x_1 o cualquier incremento en y_1, por infinitesimalmente pequeño que sea, hará que el ordenamiento de preferencias se altere, $x \prec y$.

Teorema de Debreu (o representabilidad): Si la relación de preferencias $\succeq$ es completa, transitiva y continua respecto de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^L$, entonces existe una función $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $x \succ y$ si y sólo si $u(x) > u(y)$ (es decir, las preferencias son representables por una función de utilidad).

En adelante trabajaremos exclusivamente con funciones de utilidad en vez de relaciones de preferencias. Esto es muy práctico, pues en vez de comparar canasta por canasta, tenemos un problema de programación. Si adicionalmente asumimos que las funciones de utilidad son continuas[3] y dos veces diferenciables, podemos tratarlo como un problema de cálculo, y eso haremos.

Antes de terminar esta sección, surge la pregunta, ¿si la relación de preferencias no es continua, entonces no es representable por una función de utilidad? La respuesta es no necesariamente; notemos cómo el teorema de Debreu es del tipo "si A, entonces B", y no del tipo "si y sólo si A, entonces B". Hay relaciones de preferencias transitivas, completas pero discontinuas, que no obstante permiten una función de utilidad. A manera de ejemplo, definimos una relación de preferencias de aversión a bienes fraccionales sobre un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^L_+$, como $x \succeq y$ si $x_i \in \mathbb{N}_0 \forall i$ o si $[x_i \notin \mathbb{N}_0$ para alguna i y también $y_j \notin \mathbb{N}_0$ para alguna $j]$. Podemos demostrar que estas preferencias son representables por la función de utilidad (no continua):

[3]Aunque una relación de preferencias sea continua, es posible representarla por funciones no continuas mediante transformaciones monótonas, que veremos más adelante

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

2.2 Curvas de indiferencia y la función de utilidad

Recordemos que, por definición de la función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}^L$:

$$x \succ y \qquad \text{si y solo si} \qquad u(x) > u(y)$$

La primera propiedad de las funciones de utilidad es que las preferencias son invariantes a transformaciones monótonas de la función de utilidad.

Una función **estrictamente monótona** $f : Y \to \mathbb{R}$, con $Y \subseteq \mathbb{R}$ es aquella tal que para toda $x, y \in Y$ tal que $x > y$, $f(x) > f(y)$. En donde Y es el dominio de la función f. Para el caso de las transformaciones monótonas, si $u : X \to Y$, con $X \subseteq \mathbb{R}^L$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$, entonces requerimos únicamente que $f : Y \to \mathbb{R}$ sea monótona (esto es, la función f tiene que ser creciente en el codominio de u).

El que las preferencias sean invariantes a transformaciones monótonas de la función de utilidad significa que si $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa el ordenamiento de preferencias $\succeq$, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente monótona, entonces $f \circ u : X \to \mathbb{R}$ también representa el ordenamiento de preferencias $\succeq$.

Es fácil demostrar lo anterior. Por definición de función de utilidad, $x \succ y$ si y sólo si $u(x) > u(y)$. Como f es una función monótona, entonces $u(x) > u(y)$ si y sólo si $f(u(x)) > f(u(y))$. Por tal motivo, $f(u(x))$ también representa las mismas preferencias. En general existe una infinidad de transformaciones monótonas para las funciones de utilidad. Por lo mismo, cabe señalar que lo único que nos interesa es si $x \succeq y$ o $u(x) \geq u(y)$, pero no nos interesa el valor concreto que $u(x)$ o $u(y)$ toman. Las funciones de utilidad pueden tomar valores negativos, valores muy pequeños, valores muy grandes, o demás, sin ningún problema. Lo que nos interesa es el ordenamiento de canastas que resulte de dicha función de utilidad. Por eso mismo decimos que **la función de utilidad es meramente ordinal**.

En general, nos referimos a la función de utilidad evaluada en una canasta en particular como "el nivel de utilidad", y hay quienes se refieren a la medida de utilidad como "utiles" o "útiles". No obstante, decir "el nivel de utilidad es de 100" o "el agente recibe 5 utiles" carece de significado en esta teoría, puesto que lo único que interesa es si el nivel de utilidad es mayor o menor entre dos canastas.

A manera de ejemplo, supongamos que $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, con $\alpha, \beta > 0$. Como $x_1, x_2 \geq 0$, entonces $u(x_1, x_2) \geq 0$. Por tal motivo podemos pensar en una función de utilidad monótona, $f(z) = z^2$ que es creciente cuando $z \geq 0$. Entonces, $f(u(x)) = x_1^{2\alpha} x_2^{2\beta}$ representa las mismas preferencias.

Ahora pensemos en su lugar que la función de utilidad está dada por $u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$. Notemos que para $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $u(x_1, x_2) \in (-\infty, \infty)$. ¿Podemos elevar esta función de utilidad al cuadrado y obtener las mismas preferencias? No, puesto que elevar al cuadrado no es estrictamente creciente, sino que es una función decreciente para números negativos. Como una función de utilidad logarítmica puede tomar valores negativos, elevarla al cuadrado no es una transformación monótona.

Ahora bien, una de las ventajas de tratar con funciones de utilidad es que nos permiten dibujar curvas de indiferencia de manera sencilla. Para hacer esto fijamos la utilidad en un nivel arbitrario $u(x_1, x_2) = u$, y despejamos $x_2 = x_2(x_1)$; esto es, fijamos x_2 como una función de x_1 (u deja de ser variable, pues la fijamos). Veremos dos ejemplos:

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{u}{x_1}$$

$$u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = (u - x_1)^2 \qquad x_1 \leq u$$

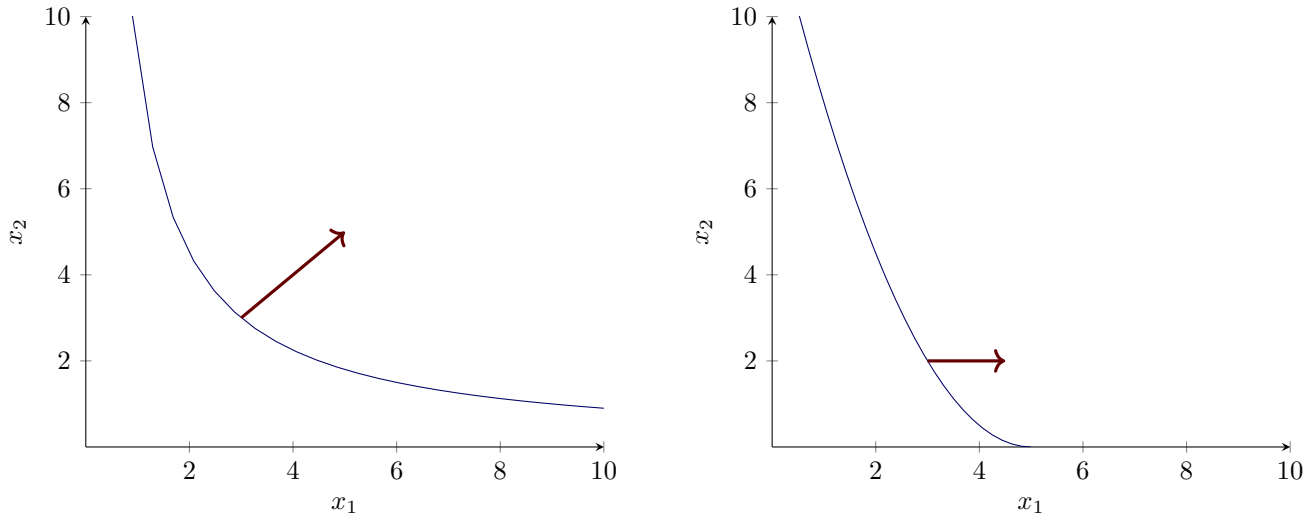


Figure 2.2: Curvas de indiferencia a partir de la función de utilidad.

La primera función de utilidad tiene curvas de preferencia similares a una función del tipo $f(x) = 1/x$, mientras que la segunda función es del tipo de la mitad izquierda de una función cuadrática. Por lo tanto, podemos fácilmente dibujar las curvas de indiferencia como se presenta en la figura 2.2.

2.3 Utilidad Marginal y Tasa Marginal de Sustitución

Una de las ventajas de tener una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ que sea de la clase C^1 es que podemos obtener la **utilidad margianal**, que definimos como el cambio en la utilidad ante cambios marginales en el consumo de un bien, manteniendo todos los demás bienes constantes. A tal caso, la utilidad marginal del bien i, a la que denominamos $u_i(x)$ está dada por:

$$u_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

La utilidad marginal siempre está evaluada en un punto x. Esta utilidad marginal nos dice cuánta más utilidad recibe un agente ante cambios en la canasta de consumo. No obstante, habíamos mencionado que la utilidad es meramente ordinal, por lo que decir que la utilidad marginal es de 10, o de 100 o de 1000 no es informativo. Recordemos que el nivel de utilidad en una canasta sólo tiene sentido comparándolo con otra canasta. Igualmente, la utilidad marginal de un bien sólo tiene sentido si la comparamos con la utilidad marginal de otro bien. Aquí es donde entra la tasa marginal de sustitución.

La **Tasa Marginal de Sustitución** TMS_{j-i} es la tasa a la que el individuo está dispuesto a intercambiar unidades del bien i por unidades del bien j, en el margen. En concreto, TMS_{j-i} dice cuantas unidades del bien j se está dispuesto a sacrificar por una unidad adicional del bien i, **manteniendo constante las unidades distintas a los bienes x_i y x_j, y manteniendo constante el nivel de utilidad**. Se define como:

$$TMS_{j-i}(x) = \frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j}(x) = \frac{u_i(x)}{u_j(x)} \approx -\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}(x)$$

La TMS siempre se considera entre dos bienes únicamente. El supuesto es que únicamente la cantidad de dos bienes cambian de manera marginal, manteniendo el nivel de utilidad constante:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial u}{\partial x_j}dx_j = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j} = \frac{u_i(x)}{u_j(x)} \approx \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$$

Notemos que la TMS está evaluada en un punto específico x. Esto quiere decir que la TMS cambia cuando cambia cuando cambia la canasta de consumo. Lo anterior ya lo habíamos anticipado cuando hablamos de la interpretación de las curvas de indiferencia, diciendo que conforme aumenta el consumo del bien x_1, cada vez estamos dispuestos a sacrificar menos unidades del bien x_2 por unidades adicionales de x_1.

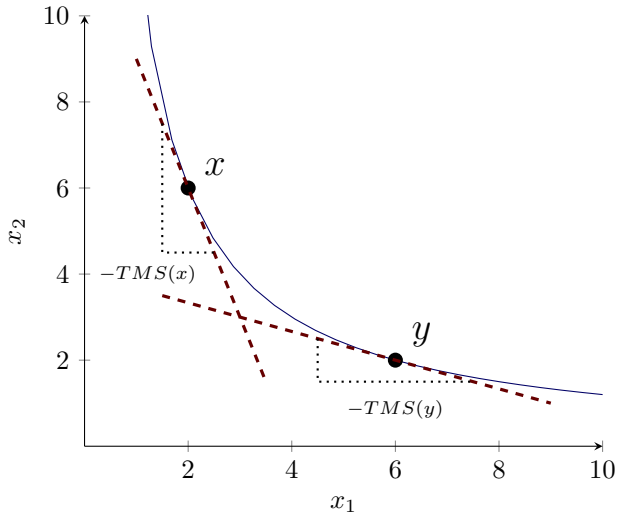


Figure 2.3: Curvas de indiferencia a partir de la función de utilidad.

En la figura 2.3 observamos cómo la TMS tiene la interpretación gráfica de la pendiente de las curvas de indiferencia, para determinado valor u_0, y que dependerá de la canasta sobre la curva de indiferencia en la que estemos ubicados. A manera de ejemplo, si las preferencias son del tipo $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, la TMS_{2-1} está dada por:

$$TMS_{2-1}(x) = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Anteriormente habíamos corroborado que las preferencias no cambian ante transformaciones monótonas. En particular, si las preferencias no cambian, tampoco ha de cambiar la TMS. Esto es fácil de corroborar. Asumamos que el individuo tiene una función de utilidad dada por $u(x)$, y que le aplicamos la transformación monótona $f(z)$, tal que la nueva función de utilidad es $\tilde{u}(x) = f(u(x))$. Notemos que, por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(u(x))u_i(x)$$

De lo anterior, que la TMS de la función de utilidad transformada sea:

$$\widetilde{TMS}_{j-i}(x) = \frac{f'(u(x))u_i(x)}{f'(u(z))u_j(x)} = \frac{u_i(x)}{u_j(x)} = TMS_{j-i}(x)$$

Así, si bien la utilidad marginal puede cambiar ante transformaciones monótonas, la TMS no cambia. Esto se debe, nuevamente, a que la función de utilidad cumple un objetivo meramente ordinal.

Ahora, anteriormente habíamos visto algunas propiedades deseables sobre las preferencias. ¿Cómo se traducen dichas propiedades sobre las preferencias en propiedades de la función de utilidad?

2.4 Reflexividad, Completitud y Transitividad

Las primeras tres propiedades sobre las preferencias con las que tratamos son las de **reflexividad, completitud y transitividad**. Por el Teorema de Debreu, si existe una función de utilidad que represente las preferencias, entonces es porque las preferencias satisfacen estas tres propiedaes (recordemos que si las preferencias son transitivas, necesariamente son reflexivas). Por tal motivo, la función de utilidad va a sar reflexiva, completa y transitiva:

- La función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ es reflexiva. Esto es, $u(x) \geq u(x)$. Esta propiedad deviene de la reflexividad de los números reales.
- La función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ es completa. Esto es, o $u(x) \geq u(y)$, o $u(y) \geq u(x)$ (o ambas). Lo anterior deviene de la completitud de los números reales.
- La función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ es transitiva. Esto es, si $u(x) \geq u(y)$, y $u(y) \geq u(z)$, entonces $u(x) \geq u(z)$. Otra vez, esta propiedad deviene de la transitividad de los números reales.

El Teorema de Debreu también hace uso de la continuidad de las preferencias. No obstante, ésta propiedad no se traslada a la función de utilidad, puesto que siempre podemos pensar en transformaciones monótonas discontinuas que, no obstante mantengan el ordenamiento de preferencias continuas.

2.5 Monotonicidad

Para el caso de preferencias **localmente no saciables, monótonas o estrictamente monótonas**, usamos las definiciones de la sección 1.2, sustituyendo $y \succ x$ por $u(y) > u(x)$ ($y \succeq x$) por $u(y) \geq u(x)$.

Esto es un tanto obvio. No obstante, si una función de utilidad es de clase C^1 (diferenciable por lo menos una vez respecto de cada uno de sus argumentos), podemos mostrar dichas propiedades utilizando derivadas. Recordemos que el vector gradiente de u, $\nabla u(x)$, es el vector de primeras derivadas respecto a cada uno de sus argumentos:

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_L} \right)$$

Teorema respecto de las propiedades de monotonicidad Si las preferencias $\succeq$ son represetables mediante una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, y u es de clase C^1, entonces:

- Las preferencias son **localmente no saciables** si y sólo si $\nabla u(x) \neq 0$, en donde 0 representa un vector $1 \times L$ de puros ceros. Otra forma de decir esto es que el gradiente de la función de utilidad no se desvanece.

  Recordemos que el vector gradiente tiene la interpretación de la dirección de máximo crecimiento de una función de utilidad. Si el vector gradiente nunca es cero, eso quiere decir para cada punto $x \in X$, existe algún cambio infinitesimal tal que la función de utilidad incrementa, y por tanto se llega a una canasta con preferencia estricta sobre la inicial.

- Las preferencias son **monótonas** si y sólo si $\nabla u(x) \geq 0$ y $\nabla u(x) \neq 0$. Lo anterior quiere decir la primera derivada de la función de utilidad respecto de cualquier bien x_i tiene que ser mayor o igual a cero, pero no pueden ser todas iguales a cero.

  Lo anterior señala que aumentar marginalmente el consumo de cualquier bien no disminuye la utilidad, aunque aumentar el consumo de todos los bienes sí aumenta la utilidad.

- Las preferencias son **estríctamente monótonas** si y sólo si $\nabla u(x) \gg 0$. Esto es, la primera derivada de $u(x)$ respecto de cualquier bien tiene que ser estrictamente mayor a cero, por lo que aumentar cualquier bien resulta en un nivel mayor de utilidad.

La demostración de este teorema es trivial, y se deja al lector realizarla.

La mayoría de las funciones de utilidad con las que trataremos son de la clase C^1, por lo que podemos usar los teoremas anteriores para revisar si la función de utilidad cumple con las propiedades de monotonicidad.

2.6 Convexidad de las preferencias

Esta sección es, tradicionalmente, confusa para los estudiantes. Esto se debe a que generalmente tratamos con tres conceptos de convexidad:

1. Convexidad de las preferencias.
2. Convexidad de los conjuntos.
3. Convexidad de las funciones.

Estos conceptos no son lo mismo, ni existe una relación uno a uno. Es necesario tener clara esta distinción. En la sección 1.2 definimos las preferencias convexas:

Preferencias Convexas

- Una relación de preferencias $\succeq$ es **convexa** si, para toda $x, y, z \in X$ tal que $y \succeq x$ y $z \succeq x$, y para cualquier $\alpha \in (0,1)$, entonces $\alpha y + (1-\alpha)z \succeq x$.
- Una relación de preferencias $\succeq$ es **estrictamente convexa** si, para toda $x, y, z \in X$ tal que $y \succeq x$ y $z \succeq x$, y para cualquier $\alpha \in (0,1)$, entonces $\alpha y + (1-\alpha)z \succ x$.

Asimismo, **las preferencias, o son convexas, o no son convexas.** Esto es, **NO existe una definición de preferencias cóncavas**.

Ahora, recordemos la definición de cálculo que los alumnos han de saber sobre las funciones:

Funciones cóncavas y convexas
Decimos que una función $f : X \to Y$, con $X \subseteq \mathbb{R}^L$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$ es **cóncava** si para toda $\alpha \in (0,1)$, y para toda $x, x' \in X$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x'),$$

y es **estríctamente cóncava** si la desigualdad anterior es estricta.
Decimos que una función $f : X \to Y$, con $X \subseteq \mathbb{R}^L$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$ es **convexa** si para toda $\alpha \in (0,1)$, y para toda $x, x' \in X$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x'),$$

y es **estríctamente convexa** si la desigualdad anterior es estricta.

En general, una función es cóncava si, al dibujar una recta entre cualesquiera dos puntos de la función, la recta nunca queda por encima de la función, y es estrictamente cóncava si la recta siempre está por debajo de la función. Similarmente, una función es convexa si al dibujar una línea recta entre cualesquiera dos puntos de la función, la recta nunca queda por debajo de la función, y es estrictamente convexa si la recta siempre está por arriba de la función.

Cabe señalar que es posible que las funciones no sean ni cóncavas ni convexas, como suelen ser polinomios de grado mayor a 2. Ahora, existe un concepto menos utilizado, pero de mayor relevancia en la teoría del consumidor, que es el de función cuasicóncava y cuasiconvexa.

Funciones cuasicóncavas y cuasiconvexas
Decimos que una función $f : X \to Y$, con $X \subseteq \mathbb{R}^L$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$ es **cuasicóncava** si para toda $\alpha \in (0,1)$, y para

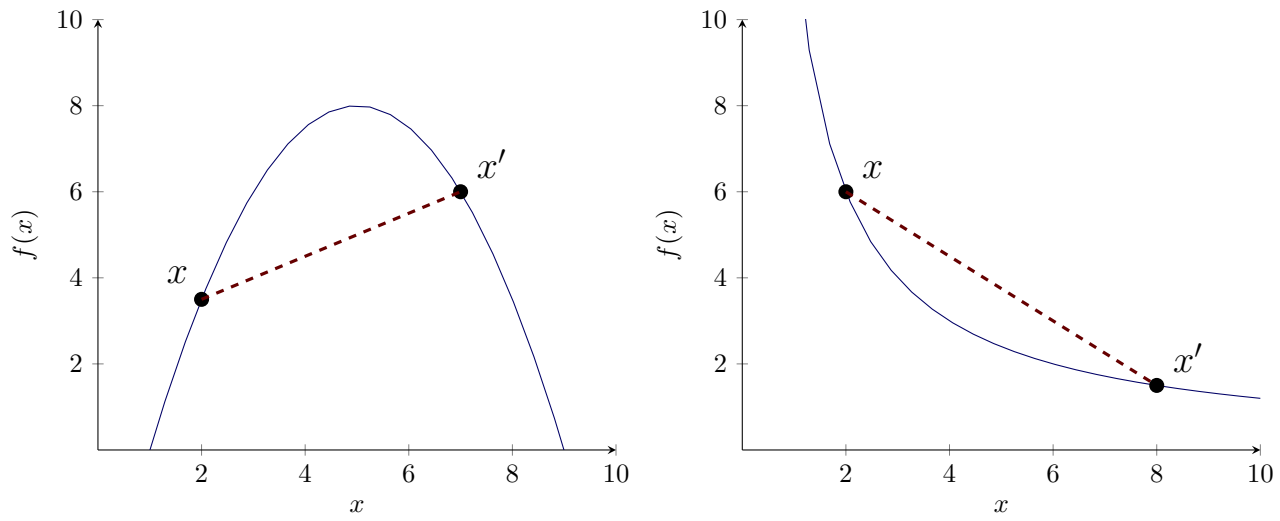


Figure 2.4: Función estríctamente cóncava (izquierda) y estrictamente convexa (derecha).

toda $x, x' \in X$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq \min\{f(x), f(x')\},$$

y es **estríctamente cuasicóncava** si la desigualdad anterior es estricta.
Decimos que una función $f : X \to Y$, con $X \subseteq \mathbb{R}^L$ y $Y \subseteq \mathbb{R}$ es **cuasiconvexa** si para toda $\alpha \in (0,1)$, y para toda $x, x' \in X$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq \max\{f(x), f(x')\},$$

y es **estríctamente cuasicóncava** si la desigualdad anterior es estricta.

En general, una función es cuasicóncava si, al dibujar una recta entre cualesquiera dos puntos de la función, la recta nunca queda por debajo del menor de los puntos elegido, y es estrictamente cuasicóncava si la recta siempre está por encima del menor de los dos puntos elegidos. Una interpretación análoga existe para la cuasiconvexidad.

En la figura 2.5 a la derecha graficamos una función cuasicóncava. Notemos que sigue habiendo esta forma de "cueva", aunque dejamos de prestar importancia a la curvatura de las paredes. A la izquierda, está una función que es a la vez cuasicóncava y cuasiconvexa. En general, si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es estrictamente creciente o decreciente, entonces es a la vez cuasicóncava y cuasiconvexa. Asimismo, las únicas funciones que son cóncavas, convexas, cuasicóncavas y cuasiconvexas son las funciones afines (lineales en las variables más algún desplazamiento).

Un ejercicio que queda a los lectores es demostrar que toda función cóncava es cuasicóncava, pero no toda función cuasicóncava es cóncava. Similarmente, toda función convexa es cuasiconvexa, pero no toda función cuasiconvexa es convexa. De manera similar, es posible que las preferencias no sean ni cuasicóncavas ni cuasiconvexas.

La concavidad y la convexidad son medidas de la curvatura de una funcion, y por lo tanto son conceptos cardinales. Por su parte, la cuasiconcavidad y la cuasiconvexidad no se relacionan a la curvatura de una función, sino únicamente al orden en el que se encuentra un punto respecto de otro, por lo que son conceptos ordinales. Esto es de particular importancia en la teoría del consumidor que hemos desarrollado, puesto que la función de utilidad no tiene una representación cardinal, sino únicamente ordinal. Por lo tanto, nos interesan los conceptos de cuasiconcavidad y de cuasiconvexidad.

Función de utilidad y convexidad de las preferencias

- Si la función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ es **cuasicóncava**, entonces representa **preferencias convexas**. De manera conversa si las preferencias son convexas y son representables por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, dicha función de utilidad es cuasicóncava.

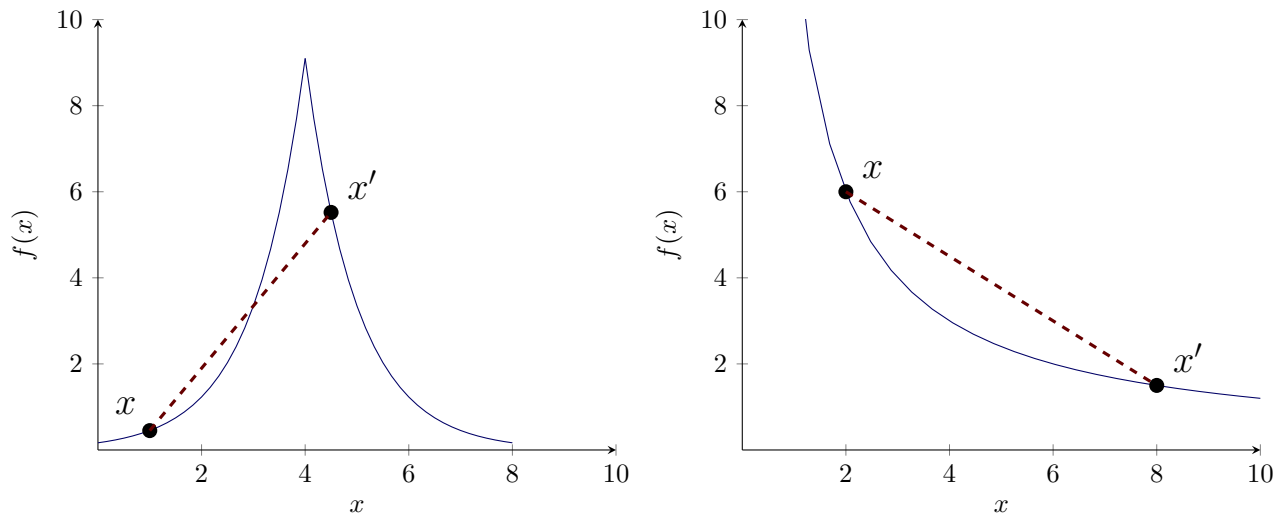


Figure 2.5: Función estríctamente cuasicóncava (izquierda) y estrictamente cuasiconvexa (derecha).

- Si la función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ es **estrictamente cuasicóncava**, entonces representa **preferencias estrictamente convexas**. De manera conversa si las preferencias son estrictamente convexas y son representables por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, dicha función de utilidad es estrictamente cuasicóncava.

Hasta ahora hemos visto dos de los conceptos de convexidad: el de preferencias, y el de la función de utilidad (aunque en la función de utilidad, nos interesa la cuasiconcavidad). Hay un tercer concepto, y es el de los conjuntos.

- Decimos que **un conjunto X es convexo** si para toda $\alpha \in (0,1)$, y para toda $x, y \in X$, $(\alpha x + (1-\alpha)y) \in X$. Esto quiere decir que si tomamos dos puntos al interior de un conjunto, y los promediamos, dicho promedio necesariamente estará al interior del conjunto.
- Decimos que **un conjunto X es estrictamente convexo** si para toda $\alpha \in (0,1)$, y para toda $x, y \in X$, $(\alpha x + (1-\alpha)y \in \text{int}(X)$, en donde $\text{int}(X)$ denota el interior de X, esto es, todos los puntos de X que no están en la frontera.[a]

[a] Decimos que un punto x está en el interior de un conjunto X, $x \in \text{int}(X)$, si existe una $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq X$, en donde $B_\varepsilon(x)$ es la bola abierta de radio ε centrada en x.

A manera de ejemplo, si definimos el conjunto $X = [0,1]$, dicho conjunto es convexo, puesto que cualquier promedio de números entre 0 y 1 va a estar necesariamente entre 0 y 1. Si ahora tomamos el conjunto $X = [0,1] \cup [2,3]$, dicho conjunto no es convexo, puesto si tomamos $0.5 \in X$ y $2.5 \in X$, y $\alpha = 0.5$, el promedio resulta en $1.5 \notin X$. Si $X \in \mathbb{R}^2$, generalmente podemos dibujujar el conjunto, unir dos puntos por una línea recta, y si dicha línea recta siempre está adentro del conjunto, el conjunto es convexo; si la línea sale en algún momento, el conjunto no es convexo. Al igual que las preferencias, **o un conjunto es convexo, o no lo es**. **No** existe una definición de conjuntos cóncavos.

Lo anterior se representa en la figura 2.6. Notemos que, para el conjunto estrictamente convexo, para cualesquiera dos puntos x y x', si dibujamos una línea entre estos, la línea está en el interior del conjunto. Para el conjunto convexo, la línea puede estar en la frontera, pero no puede salir del conjunto. Y si se puede dibujar una línea que salga del conjunto, entonces el conjunto no es convexo.

La noción de conjuntos convexos nos ayuda a definir si una función es cuasicóncava (y por tanto representa preferencias convexas). En particular, nos interesa un conjunto al que denominamos el conjunto superior de una función.

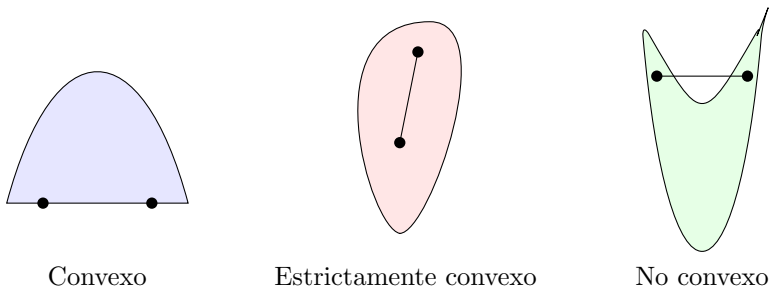


Figure 2.6: Tipos de conjuntos.

Conjunto superior de una función
Definimos el **conjunto superior** de $u : X \to \mathbb{R}$ respecto de un nivel u_0, $CS(u, u_0)$ como:

$$CS(u, u_0) = \{x \in X : u(x) \geq u_0\}.$$

Esto es, fijemos un nivel de utilidad u_0 de la función de utilidad. El conjunto superior de esta función son todas las canastas x que le dan al agente una utilidad igual o superior a u_0. En particular, si estamos en $L = 2$, podemos dibujar el conjunto superior de la siguiente manera:

1. Fijamos un nivel de utilidad arbitrario $u_0 = u(x_1, x_2)$, despejamos para x_2, y obtenemos la curva de indiferencia correspondiente.
2. Identificamos la dirección en que la función de utilidad crece.
3. Todas las canastas en dicha dirección son preferidas a todas las canastas sobre la curva de indiferencia, podemos sombrear el área correspondiente. Dicha área es nuestro conjunto superior.

Lo anterior se representa en la figura 2.7 para el caso de una función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ y un nivel de utilidad $u_0 = 9$.

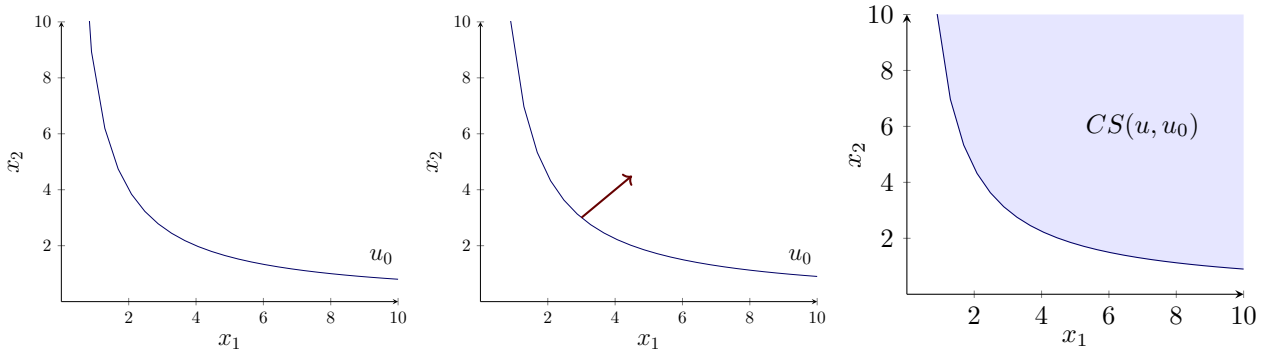


Figure 2.7: Función estríctamente cuasicóncava (izquierda) y estrictamente cuasiconvexa (derecha).

Uniendo las piezas:

Cuasiconcavidad de la función de utilidad (1)

- Una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ es **cuasicóncava** si y sólo si el conjunto superior $CS(u_0)$ es convexo para cualquier u_0 en el codominio de $u(x)$.
- Una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ es **estrictamente cuasicóncava** si y sólo si el conjunto superior $CS(u_0)$ es estrictamente convexo para cualquier u_0 en el codominio de $u(x)$.

Para terminar de hilar, si queremos verificar que las preferencias de los agentes son convexas (estrictamente convexas), basta con verificar si la función de utilidad es cuasicóncava (estrictamente cuasicóncava). Y para verificar que la función de utilidad es cuasicóncava (estrictamente cuasicóncava), basta con dibujar el conjunto superior es convexo (estrictamente convexo) para cualquier nivel de utilidad. A este respecto, en general trataremos con funciones de utilidad que generen curvas de indiferencia similares para cada nivel de utilidad, por lo que bastará con dibujar una curva de indiferencia para revisar cómo se ven todas.

En el ejemplo de la figura 2.7, notamos que el conjunto superior es estrictamente convexo para $u(x_1, x_2) > 0$, por lo que en este rango la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava, y por tanto las preferencias son estrictamente convexas.

Regresando brevemente a la figura 2.3, vemos cómo si las preferencias son monótonas, el conjunto superior respecto de u_0 está a la derecha de la curva de indiferencia. Asimismo, la curva de indiferencia (la frontera del conjunto superior) tiene una TMS que es decreciente conforme aumenta el consumo de x_1. Esto tiene la interpretación de rendimientos marginales decrecientes, por lo que si la TMS es decreciente, podemos concluir la existencia de preferencias estrictamente convexas (si la TMS es no creciente, concluimos la existencia de preferencias débilmente convexas).

Dedicamos mucho espacio a convexidad de las preferencias (cuasiconcavidad de la función de utilidad). Si bien la convexidad de las preferencias es una propiedad fuerte, tiene sus bondades tanto en la interpretación que se le da a las preferencias (rendimientos marginales decrecientes y preferencia por consumo balanceado), una ventaja adicional es que, en el problema de maximización de utilidad en la sección 3, la convexidad de las preferencias permite simplificar el proceso de maximización de utilidad.

2.6.1 Homoteticidad y Cuasilinealidad

Por último, daremos dos resultados que no demostraremos pues escapa al alcance de esta nota.

Homoteticidad y cuasilinealidad

- Las preferencias $\succeq$ son homotéticas si y sólo si son representables por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ homogénea de grado 1. Esto es, para toda $\lambda > 0$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$. En dicho caso decimos que la función de utilidad es homotética.

  Dado que las funciones de utilidad permiten transformaciones monótonas, con frecuencia elevar cualquier función de utilidad homogénea de grado $\alpha > 0$ por cualquier exponente positivo resulta en una transformación monótona. Por esto, en general basta con que la función de utilidad sea homogénea de un grado mayor a 0 para que las preferencias sean homotéticas.

- Las preferencias $\succeq$ son cuasilineales si y sólo si son representables por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ de la forma $u(x) = x_1 + g(x_2, \ldots, x_L)$ en donde x_1 es el bien numerario. En dicho caso decimos que la función de utilidad es cuasilineal.

Retomando los ejemplos, $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ es una función homotética, puesto que mediante la transformación monótona $f(z) = \sqrt{z}$ obtenemos las mismas preferencias con una función de utilidad $\tilde{u}(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_1}$. Notemos que $\tilde{u}(\lambda x_1, \lambda x_2) = \sqrt{(\lambda x_1)(\lambda x_2)} = \lambda\sqrt{x_1, x_2} = \lambda\tilde{u}(x_1, x_2)$.

Por su parte, notamos que la función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$ es cuasilineal.

Anteriormente anticipamos que asumir que las preferencias son homotéticas o cuasilineales permiten obtener la forma de **todas** las curvas de indiferencia a partir de una sola curva de indiferencia (algo que veremos en el problema de integrabilidad). A lo anterior ayuda que la TMS se mantiene ante cambios proporcionales en las canastas para el caso de las funciones homotéticas, mientras que se mantiene ante cambios absolutos en el bien numerario para el caso de preferencias cuasilineales.

Empecemos con una función de utilidad homotética. Sin pérdida de generalidad, asumimos que existen únicamente dos bienes. Esta función de utilidad satisface $u(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda u(x_1, x_2)$. Por tanto, la $TMS_{2-1}(\lambda x_1, \lambda x_2)$ satisface:

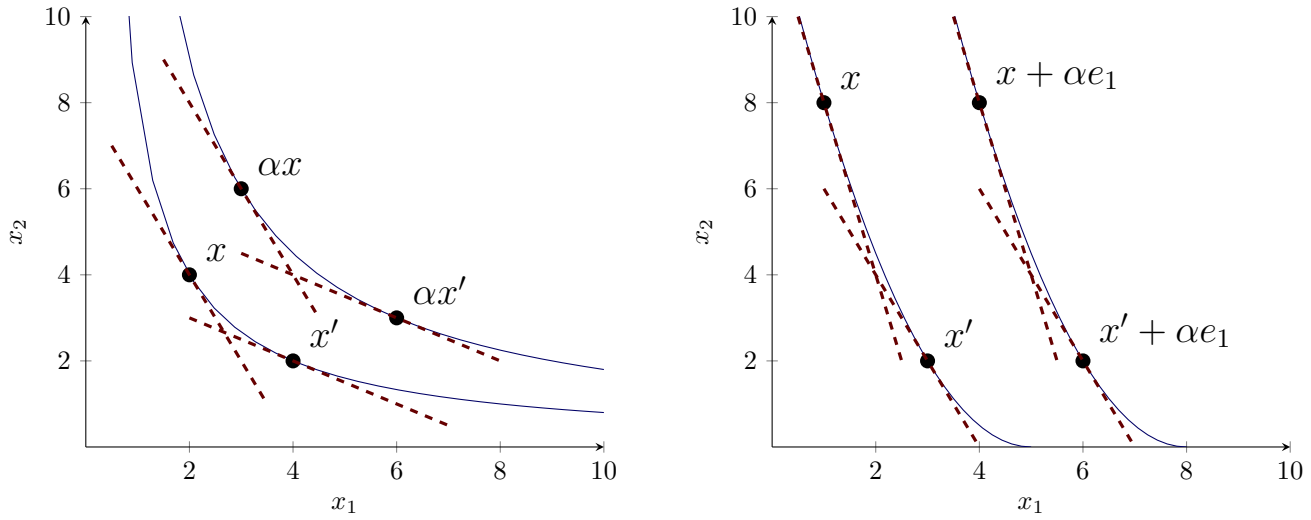


Figure 2.8: Preferencias homotéticas y cuasilineales.

$$TMS_{2-1}(\lambda x_1, \lambda x_1) = \frac{\partial u(\lambda x_1, \lambda x_2)/\partial x_1}{\partial u(\lambda x_1, \lambda x_2)/\partial x_2} = \frac{\lambda \partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\lambda \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} = TMS_{2-1}(x_1, x_2)$$

En palabras, la Tasa Marginal de Sustitución se mantiene constante ante cambios proporcionales en la cantidad de bienes.

Para el caso de las preferencias cuasilineales, si aumentamos la cantidad del bien numerario x_1, la TMS se mantiene constante. Observemos que si la función de utilidad es cuasilineal, entonces $u(x_1 + \lambda, x_2) = u(x_1, x_2) + \lambda$. Por lo que:

$$\frac{\partial u(x_1 + \lambda, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

Entonces:

$$TMS_{2-1}(x_1 + \lambda, x_2) = \frac{\partial u(x_1 + \lambda, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1 + \lambda, x_2)/\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} = TMS_{2-1}(x_1, x_2)$$

En la figura 2.8 observamos las mismas gráficas que en la figura 1.8. Ahora vemos cómo la TMS (el negativo de la pendiente de la curva de indiferencia) no cambia ante cambios proporcionales en las canastas para la función de utilidad homotética (gráfica izquierda). Asimismo, para la función de utilidad cuasilineal, la TMS no cambia anate cambios en la cantidad del bien numerario x_1.

2.7 Funciones de utilidad comunes

2.7.1 Elasticidad de sustitución constante

Decimos que las preferencias son del tipo **Cobb-Douglas** si son representables mediante la función de

utilidad

$$u(x) = \prod_{i=1}^{L} x_i^{\alpha_i},$$

en donde $\alpha_i > 1$ para toda i, y $\sum_i \alpha_i = 1$. Para el caso de dos bienes, en general escribimos:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

Como habíamos anticipado, la función de utilidad Cobb-Douglas es homotética al ser homogénea de grado 1:

$$u(\lambda x) = \prod_{i=1}^{L} (\lambda x_1)^{\alpha_i} = \lambda^{\sum_i \alpha_i} \prod_{i=1}^{L} (x_1)^{\alpha_i} = \lambda \prod_{i=1}^{L} x_i^{\alpha_i} = \lambda u(x)$$

Lo anterior es igualmente verificable para el caso de dos bienes. También podemos obtener la TMS_{j-1}:

$$TMS_{j-i}(x) = \frac{\partial u/\partial x_i}{\partial u/\partial x_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{x_j}{x_i}$$

En el caso de dos bienes, simplemente escribimos:

$$TMS(x) = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x_2}{x_1}.$$

Es fácil demostrar que esta función es cuasicóncava dibujando las curvas de indiferencia, y por tanto, representa preferencias convexas. Recordemos que las funciones siguen representando las mismas preferencias si las sometemos a una transformación monótona. Las transformaciones más comunes son elevarlas a un exponente positivo, así como tomar el logaritmo $f(z) = \ln(z)$. Ésta última transformacaión es común, pues permite trabajar con derivadas más sencillas. En particular, las preferencias Cobb-Douglas en su versión logaritmica se ven de la siguiente manera:

$$\tilde{u}(x) = \ln(u(x)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{L} x_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i \ln(x_i)$$

En el caso de dos bienes: $\tilde{u}(x) = \alpha \ln(x_1) + (1-\alpha)\ln(x_2)$. El lector podrá corroborar que aún con la transformación monótona, la TMS_{j-i} no cambia.

Las preferencias son del tipo **sustitutos perfectos** si son representables mediante la función de utilidad

$$u(x) = \sum_{i=1}^{L} \beta_i x_i,$$

con $\beta_i > 0$ para toda i, y $\sum_i \beta_i = 1$. En el caso de dos bienes, la función de utilidad es de la forma $u(x) = \beta x_1 + (1-\beta)x_2$.

Una vez más, esta función de utilidad es homogénea de grado uno, por lo que representa preferencias homotéticas. Queda al lector demostrar esto.

En el caso de dos bienes, podemos fácilmente obtener las curvas de indiferencia fijando el nivel de utilidad en $u_0 = \beta x_1 + (1-\beta)x_2$, de donde cada curva de indiferencia es de la forma:

$$x_2 = \frac{u_0}{1-\beta} - \frac{\beta}{1-\beta}$$

Esto es, todas las curvas de indiferencia son líneas rectas paralelas con pendiente $-\beta/(1-\beta)$. En general, podemos obtener la TMS:

$$TMS_{j-1}(x) = \frac{u_i(x)}{u_j(x)} = \frac{\beta_i}{\beta_j}$$

La tasa marginal de sustitución es constante y finita, lo que permite darle la interpretación sustitutos perfectos: por cada unidad adicional del bien x_i estoy dispuesto a sacrificar β_i/β_j unidades del bien x_j. En particular, si $\beta_i = \beta_j$ significa que la utilidad marginal es la misma para ambos bienes, lo que permite intercambios uno a uno: por cada rebanada adicional de pan de la marca "A" estoy dispuesto a sacrificar una rebanada de pan de la marca "B".

En general, no es común encontrar transformaciones monótonas a la función de complementos perfectos.

Decimos que las preferencias son del tipo **complementos perfectos** o **Leontieff** si son representables mediante la función de utilidad

$$u(x) = min\left\{\frac{x_1}{\alpha_1}, \frac{x_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{x_L}{\alpha_L}\right\}$$

con $\alpha_i > 0$ para toda i, y $\sum_i \alpha_i = 1$.
En el caso de dos bienes, la función de utilidad es de la forma $u(x) = min\{x_1/\alpha_1, x_2/\alpha_2\}$.

Una vez más, esta función de utilidad es homogénea de grado uno, por lo que representa preferencias homotéticas. Queda al lector demostrar esto.

La función de utilidad de complementos perfectos no es diferenciable, por lo que no es posible obtener una tasa marginal de sustitución. Para obtener las preferencias, nos referimos nuevamente a la gráfica de la derecha en la Figura 2.10. Cada curva de indiferencia parece una escuadra. Todos los vértices se encuentran sobre la línea:

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_1$$

La interpretación de los complementos perfectos es que cuando los bienes no se están consumiendo en la proporción debida (ecuación anterior), el individuo está dispuesto a sacrificar infinitas unidades del bien que consume en exceso, por una unidad del bien que consume de manera insuficiente. Alternativamente, el individuo está dispuesto a sacrificar cero unidades del bien del que consume insuficiente por una unidad adicional del bien que consume en exceso. Las curvas de indiferencia sugieren que, si pudieramos obtener una TMS, ésta sería de infinito para niveles suficientemente bajos de x_1 respecto de x_2, indefinida en el balance "perfecto", e instantáneamente desciende a cero si aumentamos x_1.

Ahora bien, ya vimos que la TMS es constante y finita para sustitutos perfectos, decreciente para la Cobb-Douglas, y con cambios extremos para complementos perfectos. Asimismo, las tres funciones de utilidad son homotéticas. De lo anterior sugerimos dos preguntas. ¿Qué relación guardan en términos de sustitución estas tres funciones? ¿Podemos encontrar una función de utilidad que englobe todos estos casos?

Decimos que las preferencias son del tipo **CES (elasticidad de sustitución constante** (CES, por sus siglas en inglés: constant elasticity of substitution) si son representables mediante la función de utilidad:

$$u(x) = \left(\sum_{i=1}^{L} \beta_i x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

con $\beta_i > 0$ para toda i, $\sum_i \beta_i = 1$, y $\sigma \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

Con frecuencia, y para mayor facilidad, la función de utilidad CES se encuentra como:

$$u(x) = \left(\sum_{i=1}^{L} x_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}},$$

con $\rho \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, y definimos

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

En el caso de dos bienes:

$$u(x) = (\beta_1 x_1^{\rho} + \beta_2 x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

Queda a los lectores demostrar que esta ecuación es homogénea de grado uno y, por tanto, representa preferencias homotéticas. ¿Cuál es la ventaja de utilizar funciones de utilidad del tipo CES? Esto tiene que ver con la elasticidad de sustitución σ, de donde deriva su nombre la función de utilidad.

Elasticidad de sustitución Definimos la **elasticidad de sustitución,** σ, como el cambio porcentual en el cociente de consumo entre dos bienes x_i/x_j ante cambios porcentuales en la tasa marginal de sustitución (manteniendo el nivel de utilidad constante):

$$\sigma = \frac{\partial(x_j/x_i)}{\partial TMS_{j-i}} \times \frac{TMS_{j-1}}{x_i/x_j} = \frac{\partial \ln(x_j/x_i)}{\partial \ln(TMS_{j-1})} \approx \frac{\Delta\%(x_j/x_i)}{\Delta\% TMS_{j-i}}$$

La elasticidad de sustitución señala qué tan tan rápido sustituye un individuo un bien por otro, cuando cambia la tasa marginal de sustitución sobre la misma curva de indiferencia. En la figura 2.9 hay una representación gráfica. Las líneas rojas, tangentes a la curva de indiferencia marcan la tasa marginal de sustitución, y su cambio de TMS a TMS'. Los rayos que parten del origen a cada punto de tangencia es el cociente de x_2/x_1, y se ve su cambio a x_2'/x_1'.

Veamos un ejemplo sencillo, con la función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$ La tasa marginal de sustitución está dada por:

$$TMS(x) = \frac{x_2}{x_1}$$

Lo anterior nos permite escribir el cociente x_2/x_1 como una función de la TMS:

$$\frac{x_2}{x_1}(TMS) = TMS$$

A partir de lo anterior es posible encontrar que, si las preferencias son del tipo Cobb-Douglas, la elasticidad de sustitución es constante e igual a 1.

Para los casos de sustitutos perfectos y complementos perfectos no es inmediato obtener una elasticidad de sustitución. En el caso de sustitutos perfectos, porque no podemos encontrar una expresión del cociente de dos bienes como función de su respectiva TMS. En el caso de complementos perfectos, porque no es diferenciable, y por tanto no hay una TMS. Pero es posible dar un poco de intuición.

En la figura 2.10 graficamos una curva de indiferencia para sustitutos perfectos (izquierda) y complementos perfectos (derecha). Si bien no podemos calcular una elasticidad de sustitución, haremos una "pseudo-elasticidad de sustitución".

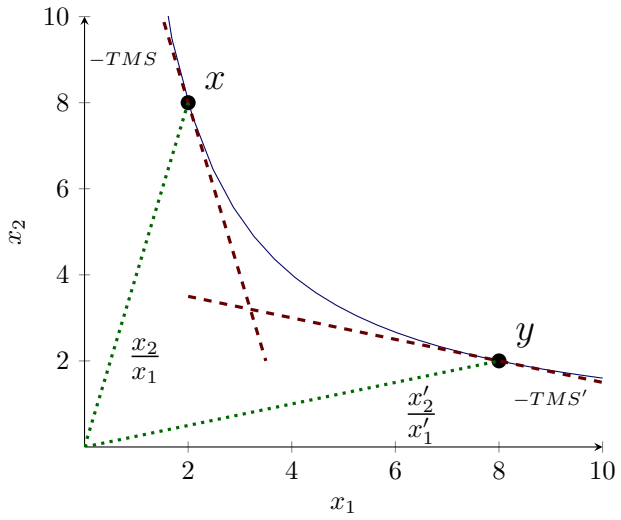


Figure 2.9: Elasticidad de sustitución para la función de utilidad Cobb-Douglas.

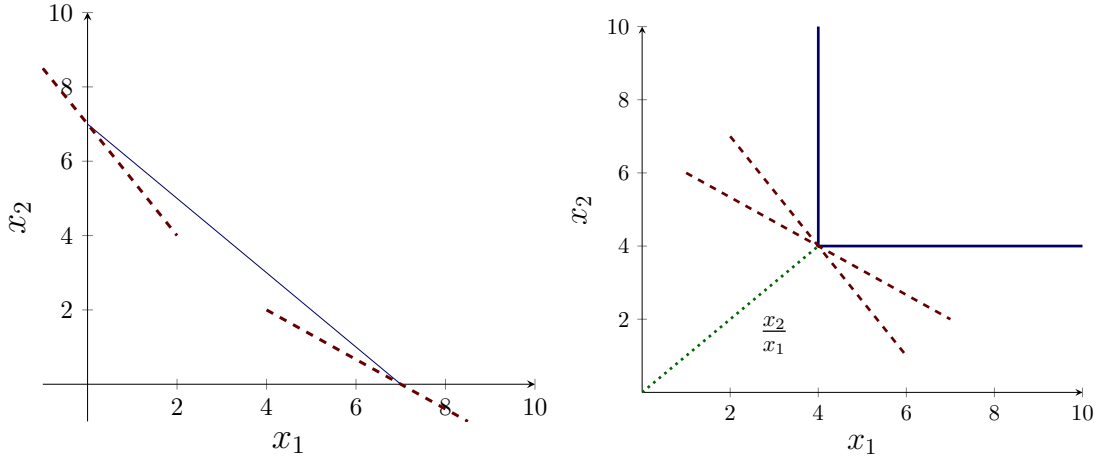


Figure 2.10: Pseudo-elasticidad de sustitución para sustitutos y complementos perfectos.

Si asumimos preferencias convexas, anteriormente habíamos señalado que conforme el consumo de x_1 aumenta, la TMS disminuye. Así, para el caso de sustitutos perfectos, podríamos considerar, sólo para efectos de dar intuición, que igual si la TMS disminuye, es porque el individuo está consumiendo más unidades de x_1. ¿Qué tantas? Hasta que x_2 sea cero, puesto que no puede disminuir más el consumo de x_2 para continuar aumentando el consumo de x_1. Así, el cociente x_2/x_1 se vuelve cero. Por el contrario, si aumentamos la TMS, es porque el consumo de x_1 disminuye. ¿Qué tanto? Hasta que x_1 es cero, puesto que ya no puede sacrificar más unidades para aumentar el consumo de x_2. Entonces el cociente x_2/x_1 se vuele $+\infty$. En este sentido, el cambio del cociente es de 0 a $+\infty$ ante un aumento en la TMS, por lo que podríamos decir que la elasticidad de sustitución es ∞ (tiene sentido que, en sustitutos perfectos, la elasticidad de sustitución sea infinito).

El caso de complementos perfectos es un poco más sencillo. Notamos que ante cambios en la TMS, el agente querrá continuar en el vértice de la curva de indiferencia, por lo que el cociente x_2/x_1 no cambia. Por tanto, complementos perfectos conlleva una elasticidad de sustitución cero.

La función de elasticidad CES engloba todos estos casos de diferentes elasticidades de sustitución, desde 0 hasta $+\infty$. En el caso de dos bienes, para una función de utilidad CES:

$$TMS(x) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Nuevamente, despejando el cociente x_2/x_1 como función de la TMS:

$$\frac{x_2}{x_1}(TMS) = \frac{\beta_2}{\beta_1} TMS^{\sigma}$$

De donde es fácil derivar que la elasticidad de sustitución es igual a σ. Si bien la función de utilidad CES no está definida para los casos $\sigma = 0$ y $\sigma = 1$, además de que ∞ no es un número en los reales, es posible demostrar que, para la función CES:

$$\lim_{\sigma \to 0} u(x) = min\{x_1, x_2, \ldots, x_L\}$$

$$\lim_{\sigma \to 1} u(x) = \prod_{i=1}^{L} x_i^{\beta_i}$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} u(x) = \sum_{i=1}^{L} \beta_i x_i$$

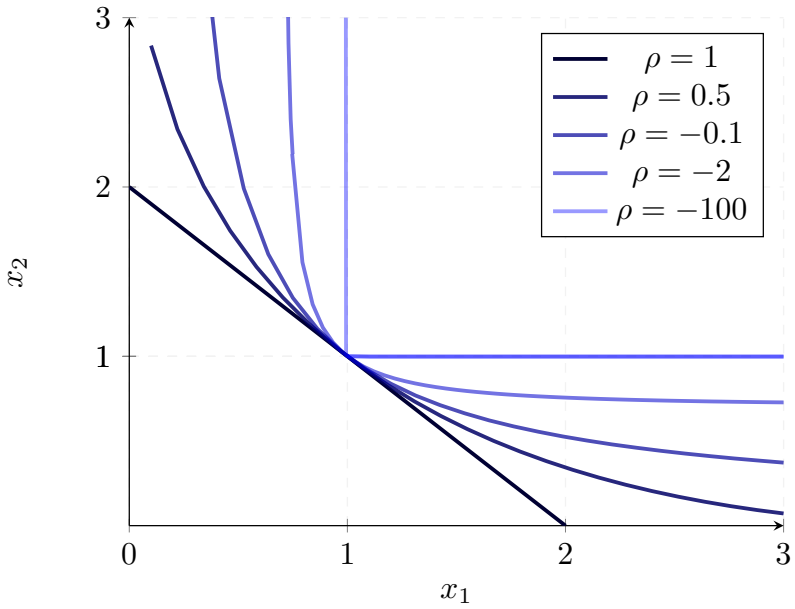


Figure 2.11: Curvas de indiferencia para utilidad CES (u(x) = 1)

En la figura 2.11 observamos las curvas de indiferencia cuando fijamos el nivel de utilidad en $u(x) = 1$, pero cambiamos el nivel de ρ, considerando nuevamente que $\rho = \frac{\sigma - 1}{\sigma}$. Podemos observar que cuando $\sigma \to 0$, entonces $\rho \to -\infty$, y la curva de indiferencia va pareciendo la de complementos perfectos. Conforme $\sigma \to 1$, $\rho \to 0$, y la curva de indiferencia parece la de una función Cobb-Douglas. Finalmente, conforme $\sigma \to \infty$, $\rho \to 1$, y las curvas de indiferencia son líneas rectas con pendiente negativa, características de una función de utilidad de sustitutos perfectos.

El único problema que tenemos es que si σ tiende a cero, en el caso de complementos perfectos todos los vértices estarán sobre la línea $x_i = x_j$ para toda i, j. Si queremos algo más flexible, podemos reescribir la función de utilidad de la forma:

e igualmente podemos demostrar que, bajo esta especificación:

$$\lim_{\sigma \to 0} u(x) = min\left\{\frac{x_1}{\beta_1}, \frac{x_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{x_L}{\beta_L}\right\}$$

Esta forma funcional se ha usado de manera más extensa para estimar funciones de producción. El problema de las funciones Cobb-Douglas es que asumen una elasticidad constante e igual a 1, lo cual es muy restrictivo para efectos de estimación, y da origen a un error grande de estimación. La decisión de optar por funciones de la forma CES es que mantienen la propiedad de homoteticidad (y por tanto, es posible estimar la forma de todas las curvas de indiferencia a partir de una sola), a la vez de que es más flexible en términos de la elasticidad de sustitución. A cambio, los econometristas tienen un parámetro adicional que estimar.

2.7.2 Utilidad cuasilineal

Ya hemos hablado de la función de utilidad cuasilineal, señalando que es de la forma $u(x) = x_1 + g(x_2, \ldots, x_L)$. Al respecto, cabe señalar que si $g(x_2, \ldots, x_L)$ es cuasicóncava, entonces $u(x)$ es cuasicóncava. en el caso de dos bienes, $L = 2$, las expresiones más comunes para $g(x_2)$ son la exponencial,

$$g(x_2) = \beta \frac{x_2^{\alpha}}{\alpha}$$

con $\alpha < 1$ y $\beta > 0$, y la logarítmica, $g(x_2) = \beta \ln(x_2)$, con $\beta > 0$.

Lamentablemete, en el caso de las funciones de utilidad que no son homotéticas, no es posible encontrar una forma funcional que relacione el cociente entre cualquier bien y el bien numerario x_j/x_1, para $j \neq 1$, con la TMS. Esto evita que podamos calcular una elasticidad de sustitución entre un bien cualquiera y el bien numerario. Calcular la elasticidad de sustitución entre cualesquiera otros bienes dependerá de la forma funcional de $g(x_2, \ldots, x_L)$.

3 Maximización de Utilidad y Demanda Marshalliana

Hemos considerado hasta ahora únicamente las propiedades de las preferencias, y cómo éstas se traducen en propiedades de las funciones de utilidad, en caso de que dichas preferencias sean representables. La razón por la que nos interesa tanto dotar de estructura a las preferencias es que permite obtener la elección óptima de los consumidores cuando están sujetos a una restricción presupuestal. En general, podemos establecer el problema del consumidor de la forma:

$$\max_{x \in X} \quad u(x) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{L} p_i x_i \leq w$$

A este problema lo denominamos UMAX. La interpretación es sencilla: maximizar la función de utilidad sujeto a la restricción presupuestal, esto es, el gasto no puede exceder al ingreso. Notemos que el argumento es $x \in X$, en donde consideramos que $X = \mathbb{R}^L_+$. Esto es, el agente podrá elegir cualquier cantidad positiva o cero.

En general podemos transformar esto a un problema de la forma:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^L} \quad u(x) \quad \text{s.a.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{L} p_i x_i \leq w \\ x_i \geq 0 \qquad \forall i. \end{cases}$$

Así, denominamos $x_i \geq 0$ para toda i como las condiciones de no negatividad.

El problema anterior de maximización se conoce como un programa, y para formas funcionales complicadas se hace uso de soluciones numéricas. No obstante, si la función de utilidad es de la clase C^2 (dos veces diferenciable respecto de todos sus argumentos), entonces podemos hacer uso del Teorema de Kuhn-Tucker. Éste nos da condiciones que necesariamente se cumplirán en un óptimo. Si además fijamos más estructura sobre la función de utilidad, las condiciones de primer y segundo orden de Kuhn-Tucker serán, además, suficientes. En general trabajaremos con funciones de la clase C^2, siendo los complementos perfectos la única excepción. No obstante, podemos encontrar una solución fácilmente.

La solución al problema de maximización serán canastas x que dependerán de los parámetros del modelo, en particular, de los precios p y el ingreso w. El problema puede tener varias soluciones, en cuyo caso denominaremos a las soluciones $x(p, w)$ la correspondencia de demanda. Si la solución es única, entonces lo denominaremos la función de demanda.

3.1 El Método de Kuhn-Tucker

Vamos a imponer un poco de estructura antes, lo cual facilitará problemas futuros. Decimos que un problema de maximización restringida está en su forma canónica si está en la forma:

$$\max_{x} \quad f(x) \quad \text{s.a.} \quad g(x) \leq 0,$$

en donde $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$, $f(x)$ denota la función objetivo, y $g(x)$ es un vector de funciones:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_M(x) \end{pmatrix}.$$

La expresión $g(x) \leq 0$ significa que $g_m(x) \leq 0$ para toda $m = 1, \ldots, M$.

En el caso de nuestro problema de maximización, ésto se traduciría en:

$$\max_x \quad u(x) \quad \text{s.a.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{L} p_i x_i - w \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ \vdots \\ -x_L \leq 0 \end{cases}$$

Concretamente, en el caso de dos bienes:

$$\max_{x_1, x_2} \quad u(x_1, x_2) \quad \text{s.a.} \begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 - w \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Cabe primero preguntar si dicho problema tiene solución. Si bien no es parte de la nota, el **Teorema de Weierstrass** señala que toda función continua sobre un dominio compacto tiene un máximo. Sabemos que el dominio es compacto, puesto que la restricción presupuestal como las de no negatividad son condiciones de desigualdad débil, y los precios son estrictamente positivos. Lo único que nos queda es asumir que $u(x)$ es una función continua. De ahora en adelante, asumiremos que es el caso, y trataremos únicamente con funciones continuas.

Si además de continua, la función es de la clase C^1, podemos utilizar el método de Kuhn-Tucker.

Teorema de Kuhn-Tucker.
Si f es continua y diferenciable, para toda solución x^* al problema de maximización restringida existe un vector de multiplicadores de Lagrange λ^* tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m^* \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x^*) = 0 \qquad & \forall i \\ g_m(x^*) \leq 0 \qquad & \forall m \\ \lambda_m^* g_m(x^*) = 0 \qquad & \forall m \\ \lambda_m^* \geq 0 \qquad & \forall m \end{aligned}$$

La forma canónica, entonces, permite evitar problemas con los signos de los multiplicadores de lagrange, λ_i.

En general, se puede considerar el problema de maximización restringida como equivalente a maximizar una función denominada "Lagrangeano", sin restricciones:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = u(x) - \sum_{m=1}^{L} \lambda_m g_m(x)$$

Las condiciones de primer orden señaladas en el recuadro anterior son equivalentes a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x^*) = 0 \qquad & \forall i \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} \leq 0 \qquad & \forall m \\
\lambda_m^* g_m(x^*) = 0 \qquad & \forall m \\
\lambda_m^* \geq 0 \qquad & \forall m
\end{aligned}$$

Las primera ecuación tiene el mismo significado que siempre: en un óptimo, incrementar o disminuir el consumo de algún bien no puede mejorar la función objetivo (el lagrangeano). La segunda ecuación repite las restricciones del problema de restricción restringida.

La tercera ecuación se conoce como **condición de holgura**. Éstas restricciones son lo más importante para utilizar el método de Kuhn-Tucker al resolver problemas de optimización restringida. Éstas señalan que o la restricción es igual a cero (por ejemplo, el gasto es igual al ingreso), o el multiplicador de lagrange asociado es igual a cero (o ambas). Notemos que si $\lambda_m^* g_m(x^*) = 0$ para toda m, entonces el Lagrangeano en el óptimo es igual a la función de utilidad evaluada en el óptimo:

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = u(x^*) - \sum_{m=1}^{L} \lambda_m^* g_m(x^*) = u(x^*)$$

Podemos interpretar como que el multiplicador de Lagrange es un "castigo" por violar una restricción. Si $g_m(x) = 0$ (decimos que la restricción está activa), entonces el multiplicador de lagrange $\lambda_m \geq 0$ haría que disminuya el valor de la función objetivo (del Lagrangeano) si se decide cambiar x tal que se viole la restricción respectiva. Si, por el contrario, $g_m(x) < 0$, entonces la condición de holgura requiere necesariamente que $\lambda_m = 0$. Esto quiere decir que cambios marginales respecto del punto x no violan la restricción asociada, por lo que no procede ningún castigo.

Las condiciones de holgura hacen que resolver problemas de optimización a mano sea complejo, pues cada una de las M restricciones puede estar activa o no. Eso quiere decir que hay hasta un total de 2^M combinaciones posibles de restricciones activas/inactivas, y hay que resolverlas todas para encontrar un óptimo. Afortunadamente, no tendremos que hacer eso.

Veamos cómo se comporta el teorema de Lagrange para el caso de maximización de utilidad sujeto a la restricción presupuestal y las condiciones de no negatividad. Por convención, denominamos λ al multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestal, y μ_i al multiplicador de lagrange asociado a la condición de no negatividad respecto del bien x_i.

Condiciones de Primer Orden de Kunhn-Tucker para UMAX
Si u es continua y diferenciable, para toda solución $x^* \in x(p, w)$ a UMAX, existe un multiplicador de Lagrange λ y L multiplicadores de lagrange μ_i, tal que:

$$\begin{aligned}
u_l(x^*) - \lambda^* p_l + \mu_l = 0 \qquad & \forall l = 1, \ldots, L \\
\sum_{l=1}^{L} p_l x_l^* - w \leq 0 & \\
x_l^* \geq 0 \qquad & \forall l \\
\lambda^* \left(\sum_{l=1}^{L} p_l x_l^* - w \right) = 0 & \\
\mu_l^* x_l^* = 0 \qquad & \forall l \\
\lambda^*, \mu_l^* \geq 0 \qquad & \forall l
\end{aligned}$$

donde $u_i(x^*) = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_l}$.

Es importante enfatizar que las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker son condiciones necesarias pero no son suficientes. Puede así existir un punto $\tilde{x}$ que satisfaga todas las condiciones, pero que no sea un máximo, sino algún mínimo. Para ello, es necesario acudir a condiciones de segundo orden. En optimización restringida, estas condiciones de segundo orden se refieren a la matriz Hessiana orlada del Lagrangeano y el determinante de sus menores principales. Esto se vuelve tedioso rápidamente, así que daremos condiciones adicionales que permiten suficiencia para la identificación de un máximo.

Si la función de utilidad u es continua, diferenciable, cuasicóncava y su gradiente no se desvanece en X, entonces las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker son **suficientes** para encontrar un máximo global restringido. Recordemos que el que u sea cuasicóncava quiere decir que las preferencias son convexas (conjunto superior convexo), mientras que un vector gradiente que no se desvanece significa que las preferencias son localmente no saciables.

3.2 La correspondencia de demanda marshalliana

Denominamos como correspondencia demanda marshalliana a la solución o a las soluciones del problema de maximización de utilidad restringida, y la denotamos como $x(p, w)$, puesto que depende del nivel de precios p y del ingreso w:

$$x(p,w) = \arg\max_{x \in X} \qquad u(x) \qquad \text{s.a.} \qquad \sum_{i=1}^{L} p_i x_i \leq w$$

Recordemos que, mientras una función asigna a cada valor del dominio un único valor del codominio, una correspondencia asigna a cada valor del dominio un conjunto de valores del codominio. Así, en nuestro problema de maximización de utilidad, es posible para determinado nivel de precios e ingreso (p, w), más de una canasta x maximiza la utilidad del consumidor. Si, por el contrario, una única canasta maximiza la utilidad del consumidor, entonces denominamos a $x(p, w)$ como la función de demanda marshalliana.

3.2.1 Un ejemplo sencillo de función de demanda marshaliana

Partimos de una funciónd de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, para $\alpha \in (0, 1)$. El problema de maximización de utilidad es:

$$\max_{x} \qquad x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \qquad \text{s.a.} \begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 - w \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Escribimos el Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 + \mu_1 = 0 \tag{3.1}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = (1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 + \mu_2 = 0 \tag{3.2}$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 - w \leq 0 \tag{3.3}$$
$$-x_1 \leq 0 \tag{3.4}$$
$$-x_2 \leq 0 \tag{3.5}$$
$$\lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w) = 0 \tag{3.6}$$
$$\mu_1 x_1 = 0 \tag{3.7}$$
$$\mu_2 x_2 = 0 \tag{3.8}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{3.9}$$
$$\mu_1 \geq 0 \tag{3.10}$$
$$\mu_2 \geq 0 \tag{3.11}$$

Nuestro sistema anterior consta de 5 variables: x_1 y x_2 que son nuestras variables de interés, pero también tenemos que considerar como variables a nuestros multiplicadores de Lagrange, λ, μ_1 y μ_2. No obstante, tenemos 5 ecuaciones y 6 desigualdades. Las dos ecuaciones corresponden a las condiciones de marginalidad, mientras que las tres desigualdades a continuación sólo repiten las restricciones del problema de maximización. Las siguientes tres ecuaciones que denominamos las condiciones de holgura. Las últimas tres desigualdades simplemente señalan que nuestros multiplicadores de Lagrange no pueden ser negativos.

Para resolver este problema, se necesita reducir el sistema de ecuaciones a uno de 5 ecuaciones con 5 variables. Para ello consideramos las condiciones de holgura 3.3, 3.4 y 3.5. Estas condiciones nos dicen que, o la restricción respectiva se satisface con igualdad, o el multiplicador de Lagrange asociado es igual a cero. Esto es, tomamos una de las restricciones, su respectiva condición de holgura, y su respectiva condición de no negatividad del multiplicador de Lagrange, y reducimos estas tres ecuaciones o desigualdades a una sola ecuación. Esto lo tenemos que hacer caso por caso.

Caso 1: Restricción presupuestal inactiva

Empecemos con la restricción presupuestal 3.3, su condición de holgura 3.6 y la condición de no negatividad del multiplicador de Lagrange asociado 3.9. La restricción presupestal me dice que, o el gasto es menor al ingreso, o el gasto es igual al ingreso. Entonces tenemos que tratar de resolver el problema para ambos casos. Supongamos que se satisface con desigualdad, esto es, $p_1 x_1 + p_2 x_2 - w < 0$. En este caso, la condición de holgura 3.6 nos dice que $\lambda = 0$, por lo que la desigualdad 3.3 no determina la solución, y podemos ignorar la ecuación 3.9.

Una vez que decidimos resolver para este caso, debemos continuar reduciendo las demás condiciones y asegurarnos que no llegamos a una contradicción. De lo anterior, entonces, ya sabemos que $\lambda = 0$.

Ahora sólo nos queda resolver el sistema para 4 variables, x_1, x_2, μ_1 y μ_2. Supongamos que, en el óptimo, $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$. Por las condiciones de holgura 3.7 y 3.8, tenemos que $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Sustituyendo todo en las condiciones de marginalidad 3.1 y 3.2, tenemos que:

$$\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = 0$$
$$(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = 0$$

Esto es, claramente, una contradicción, pues asumimos que $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$. Por lo tanto, no pueden ser ambos positivos. Supongamos entonces que $x_1 = 0$. Pero si sustituimos esto en la condición de marginalidad 3.1, tenemos que

$$\alpha \frac{x_2^{1-\alpha}}{0} + \mu_1 = 0,$$

lo cual no está determinado. Algo similar pasa con la condición 3.2 si asumimos que $x_2 = 0$. Dado que ya

cubrimos todos los casos para x_1 y x_2, y todos llevan a una contradicción, entonces no es posible que la restricción presupuestal se satisfaga con desigualdad. Por lo tanto:

$$p_1x_1 + p_2x_2 - w = 0$$

En este caso decimos que **la restricción está activa**.

Caso 2: Restricción presupuestal con igualdad y $x_1 = 0$

Sabiendo que la restricción presupuestal se satisface con igualdad, si $x_1 = 0$, necesariamente $x_2 > 0$, lo que a su vez implica que $\mu_2 = 0$. Sustituyendo en la ecuación 3.1, no obstante, llegamos a la misma indeterminación que en el punto anterior, por lo que no es posible que $x_1 = 0$ a la vez que la restricción se cumpla con igualdad.

Caso 3: Restricción presupuestal con igualdad y $x_2 = 0$

El caso es análogo al anterior, con la ecuación 3.2.

Caso 4: Restricción presupuestal con igualdad y $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$

En este caso, por las condiciones de holgura 3.7 y 3.8, necesariamente $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 0$. Sustituyendo en las condiciones de marginalidad 3.1 y 3.2, tenemos que:

$$\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} = \lambda p_1$$
$$(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} = \lambda p_2$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, tenemos que:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Despejando para x_2 tenemos que:

$$x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}x_1$$

Y sustituyendo en la restricción presupuestal, ecuación 3.3 con igualdad, tenemos que:

$$p_1x_1 + p_2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}x_1\right) = x_1\left(\frac{1}{\alpha}p_1\right) = w$$

Y despejando para x_1 obtenemos nuestra demanda marshaliana para el bien x_1:

$$x_1(p_1, p_2, w) = \alpha\frac{w}{p_1}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos para x_2 anteriormente, obtenemos que:

$$x_2(p_1, p_2, w) = (1-\alpha)\frac{w}{p_2}$$

Como la función $u(x_1, x_2)$ es estrictamente cuasicóncava, con un gradiente que no se desvanece en el interior $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$, entonces la solución que encontramos es un máximo global. Como es única, la llamamos función de demanda.

3.2.2 Interpretando las Condiciones de Kuhn-Tucker

Asumamos nuevamente que el bien $x_i^* > 0$ y también $x_j^* > 0$, lo cual quiere decir, por la condición de holgura, que $\mu_i^* = 0$ y $\mu_j^* = 0$. Entonces:

$$u_i(x^*) = \lambda^* p_i$$
$$u_j(x^*) = \lambda^* p_j$$

De las dos ecuaciones anteriores podemos obtener la expresión:

$$\frac{u_i(x^*)}{u_j(x^*)} = \frac{p_i}{p_j}$$

Notamos que en el lado derecho de la ecuación anterior tenemos la tasa marginal de sustitución TMS_{j-i}, mientras que del lado derecho tenemos los precios relativos entre j e i. Recordemos de la sección 2.3 que la tasa marginal de sustitución tiene una interpretación de la tasa a la que el individuo está dispuesto a intercambiar unidades del bien x_j por unidades adicionales del bien x_i:

$$TMS_{j-i}(x) \approx -\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}\right)^{agente}$$

Asimismo, en la sección 1.3 vimos que los precios relativos tienen la interpretación de la tasa a la que el mercado está dispuesto a intercambiar unidades del bien x_j por unidades del bien x_i:

$$\frac{p_i}{p_j} = \left(-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)^{mercado}$$

Cuando el consumo de dos bienes es positivo, el método de Kuhn-Tucker señala que la tasa marginal de sustitución iguala a los precios relativos. En otras palabras, la tasa a la que el individuo está dispuesto a cambiar unidades del bien x_j por una unidad adicional de x_i es la misma tasa de cambio que me pide el mercado. Los estudiantes escucharán *ad nauseam* la expresión "tasa marginal de sustitución igual a precios relativos". Esta es una manera muy sofisticada de decir que:

> *"Estoy dispuesto a dejar de comer dos tacos con tal de que me den una quesadilla. Y casualmente, en este mercado me dicen que si dejo de pagar dos tacos, me alcanza para comprar una quesadilla adicional."*

En la figura 3.1 observamos este escenario de solución interior cuando hay dos bienes, en donde la tasa marginal de sustitución iguala a los precios relativos en el óptimo para el caso de dos bienes. En este caso en que el consumo de ambos bienes es positivo, lo denominamos "solución interior".

Podemos igualmente suponer que en el óptimo, $x_i^* = 0$, mientras que $x_j^* > 0$. En este caso, tenemos que $\mu_j^* = 0$, y asumimos que $\mu_i^* > 0$. Entonces, de un procedimiento similar:

$$\frac{u_i(x^*)}{u_j(x^*)} = \frac{p_i}{p_j} - \frac{\mu_i^*}{\lambda^* p_j} < \frac{p_i}{p_j}$$

En términos de tasas de cambio:

$$-\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}\right)^{agente} < -\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)^{mercado}$$

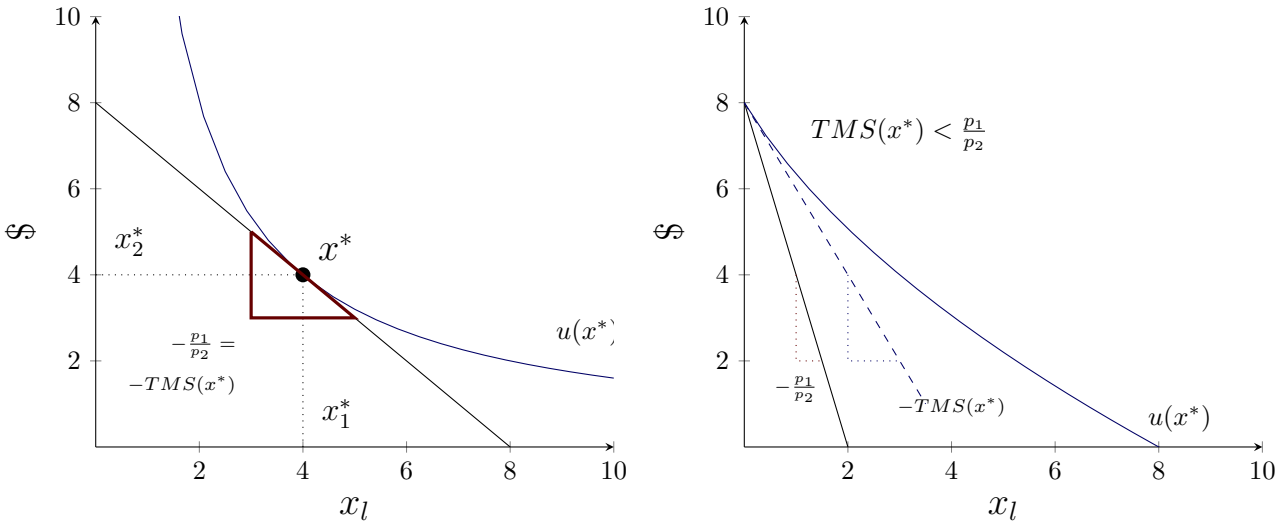


Figure 3.1: Solución interior y solución esquina.

Una interpretación es que, cuando el agente consume cero unidades de x_i, está dispuesto a sacrificar menos unidades de x_j de las que el mercado le pide para poderle dar una unidad de x_i, por lo que el agente prefiere no consumir x_i

> *"Estoy dispuesto a dejar de comer dos tacos con tal de que me den mi primer quesadilla. Pero este mercado me pide que deje de comer tres tacos para que me alcance para comprar una quesadilla. Es mucho pedir tres tacos, mejor no me compro una quesadilla."*

Esto lo podemos ver gráficamente en la figura 3.1, en la gráfica de la derecha, con la TMS en el óptimo como una pendiente menos empinada que los precios relativos.

3.3 Simplificaciones a UMAX: Ley de Walrás y condiciones de Inada

En los ejemplos anteriores, supusimos que en el óptimo el individuo agota todo su ingreso. No obstante, es posible que esto no ocurra. Un ejemplo sencillo es que exista saciedad: a partir de cierta cantidad, consumir más de cualquier bien, aunque posible, le genera una desutilidad. Como ejemplo, si sólo hay tacos y quesadillas en la economía, el individuo puede decidir dejar de comer, pues es mejor que comer hasta vomitar (una disculpa por el ejemplo gráfico).

No obstante, una condición sencilla para que el individuo agote su ingreso es que las preferencias sean monótonas.[4]

Ley de Walrás
Si las preferencias del agente son monótonas[a] entonces el individuo agota su ingreso en el óptimo, esto es:

$$\sum_{i=1}^{L} p_i x_i^* = w$$

[a] Una condición más débil es que las perferencias sean estrictamente monótonas para al menos un bien en el interior del conjunto presupuestal.

Gráficamente, si el agente se encuentra dentro de la restricción presupuestal, siempre puede moverse hacia la

[4] La Ley de Walrás es un resultado de equilibrio general, que a grandes rasgos señala que el valor del exceso agregado de demanda para todos los bienes de la economía tiene que ser cero. La Ley de Walrás que presentamos aquí es una "traducción" a equilibrio parcial.

frontera de la restricción presupuestal, y por monotonía, el individuo va a estar mejor. Esto se representa en la figura 3.2.

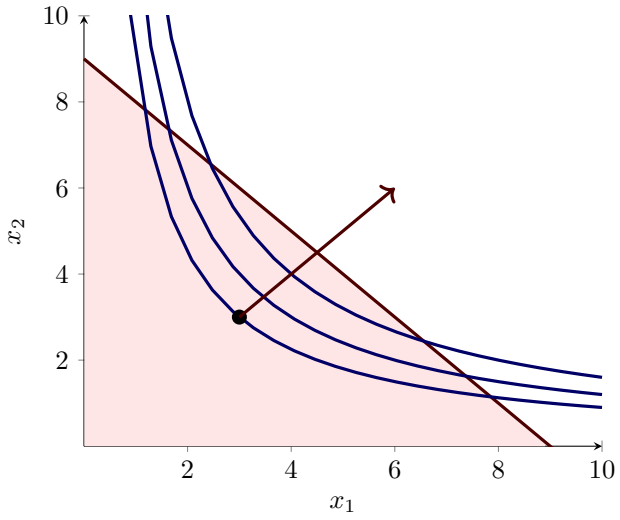


Figure 3.2: Ley de Walrás.

Demostración: Por contradicción, asumimos que

$$\tilde{x} = \arg\max_{x \geq 0} \; u(x) \qquad \text{s.a.} \qquad \sum_{i=1}^{L} p_i x_i - w \leq 0$$

y adicionalmente:

$$\sum_{i=1}^{L} p_i \tilde{x}_i - w < 0$$

Entonces existe una $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{L} p_i \left(\tilde{x}_i + \varepsilon\right) - w < 0$$

Pero por monotonía,

$$u(\tilde{x}_1 + \varepsilon, \ldots, \tilde{x}_L + \varepsilon) > u(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L)$$

Lo anterior quiere decir que cuando menos una x que satisface las restricciones, y otorga una utilidad mayor a $\tilde{x}$, por lo que $\tilde{x}$ no puede ser un máximo.■

Las preferencias monótonas implican que la restricción presupuestal se cumplirá con igualdad. Asimismo, implican que $\lambda^* > 0$ (aunque no demostraremos esto). Esto reduce el problema de Kuhn-Tucker, pues no tenemos que incluir un caso para $p \cdot x < w$.

Igualmente queremos tener condiciones que nos permitan concluir que el consumo de un bien es estrictamente positivo $x_i^* > 0$, y por tanto su multiplicador asociado es cero, $\mu_i^* = 0$. Algo que nos permite esto son las condiciones de Inada (así llamadas por Ken-Ichi Inada). Las condiciones de Inada son restricciones a una función de producción que garantizan, entre otras cosas, la existencia única de un estado estacionario en el largo plazo en una economía. No obstante, una condición en particular garantiza que un insumo es positivo en el óptimo. Antes de pasar a esto, vayamos a un poco de intuición. Consideremos una función de utilidad monótona $u(x)$ que satisfaga:

$$\lim_{x_l \to 0} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}(x) = +\infty$$

La ecuación anterior anterior señala que conforme el consumo de x_l tiende a cero, la utilidad marginal del bien x_l se va infinito. Si la utilidad marginal de x_l se va a infinito, podríamos pensar que el agente está dispuesto a gastar infinita cantidad de dinero con tal de consumir una unidad del bien x_l; no obstante, como los precios son finitos, el individuo podrá comprar aunque sea una unidad infinitesimalmente pequeña de x_l.

Esta interpretación tendría sentido en el caso de funciones de producción, en donde una productividad marginal que tiene a infinito tiene una interpretación en términos reales. No obstante, en funciones de utilidad, una utilidad marginal de infinito es poco ilustrativa.

Las condiciones de Inada restringen más la forma que puede tomar la función de utilidad. Para nuestro interés, el supuesto más importante es que la función de utilidad es cóncava.

Vamos a suponer además que $u(x)$ es de la clase C^2. Para definir concavidad, primero definimos la matriz Hessiana como la matriz de segundas derivadas:

$$\mathcal{H}_u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_L} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_L \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_L \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

Recordemos que todas las funciones cóncavas son cuasicóncavas, así que esta es una restricción un tanto más fuerte. No obstante, como la función de utilidad es ordinal y no cardinal, si la función es cuasicóncava pero no cóncava, normalmente podemos encontrar una transformación monótona que convierta la función en cóncava. Una vez más, si la función de utilidad es cóncava, es cuasicóncava, y esto implica que las preferencias son convexas.

Implicaciones de las condiciones de Inada
Si la función de utilidad $u(x)$ es monótona y cóncava, entonces si

$$\lim_{x_i \to 0} u_i(x) = +\infty$$

en el óptimo $x_i^* > 0$.
Demostración: Consideremos la primera condición de Kuhn-Tucker:

$$u_i(x) = \lambda p_i - \mu_i$$

Entonces

$$\lim_{x_i \to 0} u_i(x) = \infty = \lambda p_i - \mu_i$$

Pero como p_i es finito, al igual que λ^* y μ_i^*, por lo que $x_i^* \neq 0$.■

Las definiciones que hemos dado para funciones de utilidad del tipo Cobb-Douglas, CES, sustitutos perfectos, complementos perfectos y cuasilineales son todas funciones cóncavas. Una de las razones es que permiten obtener las condiciones de Inada fácilmente para concluir si el consumo de ciertos bienes es positivo en el óptimo. No obstante, si no es el caso de que la función de utilidad sea cóncava, entonces encontrar una transformación monótona que sea cóncava, y fácil de tratar, es difícil.

Podemos dar un pequeño colorario a lo anterior que nos permitirá trabajar con la TMS en vez de la utilidad marginal. En general, si la utilidad marginal del bien x_i es mayor a la de x_j, entonces el individuo preferiría consumir x_i a x_j. Si además x_j es positivo, el agente estaría dispuesto a sacrificar unidades de x_j por unidades de

x_i. Entonces, lo importante no es la utilidad marginal, sino la utilidad marginal respecto de otro bien, algo que obtenemos a partir de la TMS.

Corolario a las condiciones de Inada
Si la función de utilidad u es monótona, en el óptimo $x_j^* > 0$ y además:

$$\lim_{x_i \to 0} TMS_{j-i} = \frac{u_i(x)}{u_j(x)} = +\infty,$$

entonces $x_i^* > 0$.

La demostración al corolario es algo trivial, y la dejaremos de lado. Aunque podemos dar una interpretación económica: si en el óptimo x_j es positivo, y si cuando x_i se aproxima a 0 la TMS_{j-i} tiende a infinito, esto significa que el agentne está dispuesto a sacrificar, en el margen, una cantidad casi infinita de x_j con tal de obtener una unidad del bien x_i.

Un problema adicional que surge a esto es que hay que saber primero si $x_j^* > 0$. Para el caso de dos bienes, no obstante, es sencillo concluir la no negatividad de un bien u otro. Si sólo hay dos bienes, y la función de utilidad es monótona, conforme $x_i \to 0$, $x_j > 0$ por la ley de Walrás. Entonces para el caso de dos bienes:

Si $u : X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces si:

$$\lim_{x_1 \to 0} TMS_{2-1}(x) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{u_1(x)}{u_2(x)} = +\infty,$$

entonces $x_1^* > 0$. Asimismo, si

$$\lim_{x_2 \to 0} TMS_{2-1}(x) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{u_1(x)}{u_2(x)} = 0,$$

entonces $x_2^* > 0$.

3.3.1 Optimización de una función cuasilineal

Veremos un ejemplo de cómo resolver el problema de Kuhn-Tucker para el caso de una función cuasilineal. Aquí veremos la aplicación de las propiedades anteriores. El problema de maximización de utilidad de un agente con función de utilidad cuasilineal por los bienes x_1 y x_2 está dada por:

$$\max_{x_1, x_2} \quad x_1 + \ln(x_2) \quad \text{s.a.} \begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 - w \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Construimos el lagrangeano como:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = x_1 + \ln(x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

Nuestras condicionens de primer orden están dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 - p_1 + \mu_1^* = 0 \tag{3.12}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2^*} - p_2 + \mu_2^* = 0 \tag{3.13}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* - w \leq 0 \tag{3.14}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = -x_1^* \leq 0 \tag{3.15}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} = -x_2^* \leq 0 \tag{3.16}$$
$$\lambda^*(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w) = 0 \tag{3.17}$$
$$-\mu_1^* x_1^* = 0 \tag{3.18}$$
$$-\mu_2^* x_2^* = 0 \tag{3.19}$$
$$\lambda^*, \mu_1^*, \mu_2^* \geq 0 \tag{3.20}$$
$$\tag{3.21}$$

Como tenemos 3 ecuaciones de holgura, tenemos un total de $2^3 = 8$ casos por resolver. No obstante, notemos que $u_1(x) > 0$ y $u_2(x) > 0$, por lo que la función es monótona. Con esto sabemos que $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$ por la Ley de Walrás; con esto dividimos la totalidad de casos a la mitad, es decir, a 4. Asimismo, de la TMS:

$$\lim_{x_1 \to 0} TMS(x) = \lim_{x_1 \to 0} x_2 = x_2 \neq +\infty$$
$$\lim_{x_2 \to 0} TMS(x) = \lim_{x_2 \to 0} x_2 = 0$$

Por las condiciones de Inada, entonces sabemos que $x_2^* > 0$ y $\mu_2^* = 0$ por la condición de holgura (3.19). Esto permite reducir los casos nuevamente a la mitad. Así, quedamos únicamente con dos casos: $x_1 > 0$ y $x_1 = 0$.

underlineCaso 1: $x_1^* > 0$. Por la condición de holgura en la ecuación (3.18), $\mu_1^* = 0$. Como ambas μ's son iguales a cero, lo podemos sustituir en la ecuación (3.12) y (3.13) respectivamente. Así, las podemos combinar y llegar a nuestra condición de tasa marginal de sustitución igual a precios relativos:

$$x_2^* = \frac{p_1}{p_2}$$

Ya encontramos nuestra función de demanda para x_2. La única ecuación de la que no hemos hecho uso es la restricción presupuestal que, por monotonicidad, se satisface con igualdad. Entonces:

$$p_1 x_1^* + p_2 \frac{p_1}{p_2} - w = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1^* = \frac{w}{p_1} - 1$$

Ahora bien, nuestro supuesto en este caso es que $x_1^* > 0$. Entonces:

$$\frac{w}{p_1} - 1 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad w > p_1$$

Esto quiere decir que si el ingreso es suficientemente alto, el individuo adquirirá x_1. Un ejemplo es que x_1 sean bienes no necesarios: si el agente es suficientemente pobre, preferirá adquirir bienes necesarios.

Caso 2: $x_1^* = 0$. Por Ley de Walrás, sustituimos en la restricción presupuestal: $x_2^* = w/p_2$. Notemos que podemos combinar las ecuaciones (3.12) y (3.13), considerando que $\mu_2^* = 0$:

$$x_2^* = \frac{p_1 - \mu_1^*}{p_2} \leq \frac{p_1}{p_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{w}{p_2} \leq \frac{p_1}{p_2} \qquad \Longrightarrow \qquad w \leq p_1$$

en donde la desigualdad al resulta porque $\mu_1^* \geq 0$, por lo que a los precios relativos estamos restando una cantidad positiva o cero. Notamos que la condición para consumo cero de x_1 es el complemento a lo que observamos en el caso 1. Por lo tanto, podemos incluir aquí nuestras funciones de demanda:

$$x_1(p_1, p_2, w) = \begin{cases} \dfrac{w}{p_1} - 1 & \text{si } w > p_1 \\ 0 & \text{si } w \leq p_1 \end{cases}$$

$$x_2(p_1, p_2, w) = \begin{cases} \dfrac{p_1}{p_2} & \text{si } w > p_1 \\ \dfrac{w}{p_2} & \text{si } w \leq p_1 \end{cases}$$

En este caso, obtuvimos una solución única para cada nivel de precios e ingreso. No obstante, es posible que un probleama resulte en más de una solución, en cuyo caso la llamamos una correspondencia de demanda.

3.4 Propiedades de la correspondencia (función) de demanda Marshalliana

El problema de maximización de utilidad puede tener una o múltiples soluciones, y dichas soluciones dependerán de los parámetros del modelo: parámetros de la función de utilidad, los precios y el ingreso. Al conjunto valores $x = (x_1, \ldots, x_L)$ que solucionan el problema de maximización de utilidad los denominamos la correspondencia de demanda marshaliana, y la denotamos $x(p, w)$:

$$x(p, w) = \begin{pmatrix} x_1(p, w) \\ x_2(p, w) \\ \vdots \\ x_L(p, w) \end{pmatrix} \in \arg\max_{x \in \mathbb{R}_+^L} \; u(x) \qquad \text{s.a.} \qquad p \cdot x \leq w$$

En el caso de que la solución al problema de maximización de utilidad sea única, la denominamos entonces **función de demanda**.

Si la función de utilidad u es continua y diferenciable, y representa preferencias localmente no saciables, entonces la correspondencia de demanda es:

- Continua en los precios e ingreso para toda $(p, w) \gg 0$.
- Homogénea de grado cero en precios e ingreso: $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$ para toda $\alpha > 0$.
- Cumple con la Ley de Walrás: $p \cdot x(p, w) = w$.
- Si además u es cuasicóncava, $x(p, w)$ es convexa. Si u es **estrictamente cuasicóncava**, $x(p, w)$ es una solución única.
- Diferenciable, bajo ciertas condiciones.

Es rápido demostrar estas aseveraciones.

Continuidad: La continuidad deriva del teorema del Máximo de Berge. En concreto, la correspondencia de demanda es hemicontinua superior (un concepto que no veremos). En el caso de que la solución sea única y tengamos una función de demanda, la hemicontinuidad superior se traduce simple y sencillamente a que la función de demanda es continua.

Homogeneidad de grado cero: notemos que si incrementamos los precios e ingreso la restricción presupuestal no cambia:

$$\alpha p_1 x_1 + \alpha p_2 x_2 \leq \alpha w \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$$

Entonces es claro que:

$$\{x : p \cdot x \leq w\} = \{x : \alpha p \cdot x \leq \alpha w\}$$

Lo anterior señala que la restricción presupuestal no cambia, por lo que las canastas económicamente factibles no cambian para el individuo.■

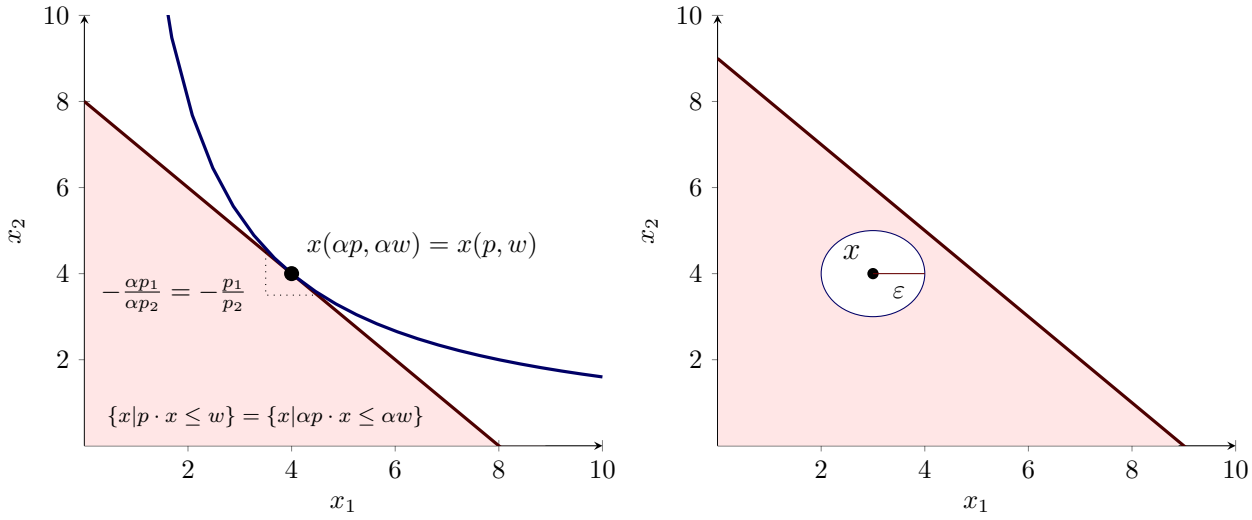


Figure 3.3: Homogeneidad de grado cero y Ley de Walrás.

La homogeneidad de grado cero se relaciona con la no ilusión de dinero. Esto es, los agentes sólo se interesan en el dinero por su capacidad para pagar por bienes reales en la economía. Así, podríamos quitarle un cero al peso (dividir todos los precios entre 10, incluyendo el sueldo), y seguiríamos comprando la misma canasta. En la gráfica 3.3 a la izquierda, vemos cómo los cambios en precios no alteran las preferencias, y tampoco alteran el conjunto presupuestal, por lo que la canasta óptima no debería por qué cambiar.

La homogeneidad de grado cero tiene una implicación muy importante. Si todos los precios y el ingreso aumentan en la misma proporción, entonces las cantidades demandadas no cambian. Basta entonces con que sólo uno de los precios no cambie para resultar en cambios en las cantidades. Esto nos permite establecer el precio de algún bien igual a uno, lo cual pone a todos los precios en función del precio del numerario. Convencionalmente fijaremos a x_1 como el numerario, entonces $p_1 = 1$ (ya lo habíamos hecho con los bienes cuasilineales). En ocasiones se considera al ingreso como el numerario, y los precios se consideran como proporciones del ingreso.

Ley de Walrás: Si para alguna $x \in x(p, w)$ se cumple que $p \cdot x < 0$, entonces por definición de no saciabilidad local, existe una canasta $x' \in B_\varepsilon(x)$ en una bola de radio ε que le da mayor utilidad al agente, tal que $p \cdot x' < w$. Esto contradice que x es un óptimo.■

En la Figura 3.3 a la derecha, vemos que si el agente consume una canasta en el interior del conjunto presupuestal, entonces podemos dibujar un círculo arbitrariamente pequeño (de radio ε) que igualmente esté dentro del conjunto presupuestal. Por no saciabilidad local, alguna de esas canastas es preferica a x. Esto contradice que x es un óptimo.

Cuasiconcavidad de $u(x)$ y convexidad de la corresopndencia de demanda. Asumamos que $x, x' \in x(p, w)$ son ambas soluciones al problema de maximización. Entonces, por cuasiconcavidad:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq u(x) = u(x')$$

Dado que $u(x)$ y $u(x')$ maximizan la utilidad:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq u(x) = u(x')$$

Para que ambas desigualdades se satisfagan, necesariamente:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)x') = u(x) = u(x')$$

Como además el conjunto presupuestal es convexo (no lo demostramos, pero es fácil hacerlo), $\alpha x + (1-\alpha)x' \leq w$. Por lo que:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)x') = \arg \max_{x \in X} u(x) \text{ s.a. } p \cdot x \leq w$$

Por tanto, cualquier combinación convexa entre canastas en la correspondencia de demanda va a estar en la correspondencia de demanda.■

Esto se representa en la Figura 3.4 a la izquierda. Si la función de utilidad es débilmente cuasicóncava, y existe más de una solución, entonces si dibujamos una línea entre las dos soluciones, cualquier punto en esa línea también es una solución al problema de maximización de utilidad. El ejemplo es sencillo, y muestra preferencias por bienes sustitutos perfectos, con una tasa marginal de sustitución igual a los precios relativos. Esto es lo que genera la multiplicidad de soluciones (correspondencia de demanda en vez de una función).

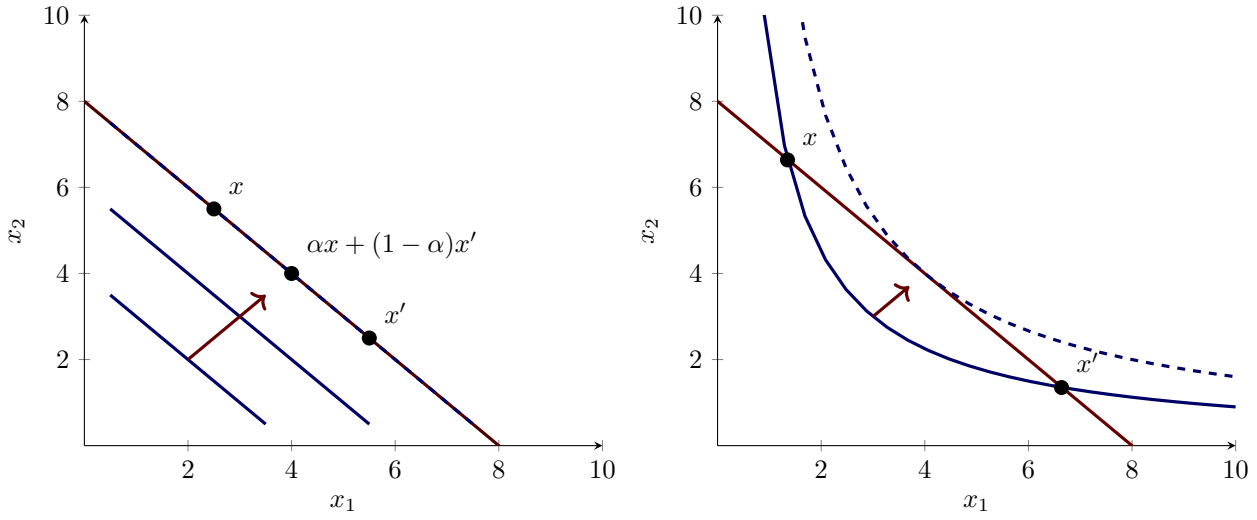


Figure 3.4: Cuasiconcavidad y cuasiconcavidad estricta.

Cuasiconcavidad estricta y unicidad de solución. Seguimos un argumento similar, aunque esta ocasión va a resultar en una contradicción. Asumamos que $x, x' \in x(p, w)$ son ambas soluciones al problema de maximización. Entonces, por cuasiconcavidad:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)x') > u(x) = u(x')$$

No obstante, dado que $u(x)$ y $u(x')$ maximizan la utilidad:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq u(x) = u(x')$$

Lo anterior es una contradicción.■

En la figura 3.4 a la derecha, vemos que si tenemos dos soluciones, si dibujamos una línea entre esas dos soluciones, cualquier canasta sobre esa línea es preferida respecto a las dos soluciones, lo cual es una contradicción.

Diferenciabilidad. Si la función de utilidad es continuamente diferenciable al menos dos veces, estríctamente cuasicóncava y su gradiente no desvanece $\nabla u(x) \neq 0$ en $\mathbb{R}^L_+$, y en el óptimo el agente consume unidades positivas de todos los bienes $x(p,w) \gg 0$, entonces la función de demanda es diferenciable si y sólo si:

$$det \begin{pmatrix} 0 & \nabla u(x(p,w))^T \\ \nabla u(x(p,w)) & D^2 u(x(p,w)) \end{pmatrix} \neq 0$$

No demostraremos esta aseveración, pero es resultado del Teorema de la Función Implícita. Si la función de utilidad no es diferenciable, entonces la definición anterior no aplica. Este es el caso de los complementos perfectos que, como veremos adelante, parten de una función de utilidad no diferenciable, pero las funciones de demanda sí son diferenciables.

3.4.1 Complementos Perfectos: función no diferenciable

El método de Kuhn-Tucker lo podemos utilizar cuando la función de utilidad es continuamente diferenciable. En los casos en que la función de utilidad no es diferenciable, tenemos que acudir a otros métodos de optimización. No obstante, algunos de estos métodos son muy sencillos. Un caso en particular es el de complementos perfectos. Asumamos que la función de utilidad de un consumidor está dada por:

$$u(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{\beta_1}, \frac{x_2}{\beta_2}\right\} \qquad \beta_1, \beta_2 > 0$$

y queremos encontrar la función de demanda marshalliana para dicho consumidor. El problema de maximización lo seguimos planteando de la misma manera:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} \quad \min\left\{\frac{x_1}{\beta_1}, \frac{x_2}{\beta_2}\right\} \qquad \text{s.a.} \quad \begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 - w \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Claramente la función anterior no es diferenciable, pero aún así podemos encontrar una solución. Lo primero que hay que ubservar es que la función de utilidad es monótona, por lo que la Ley de Walrás implica que $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$ (recordemos que la demostración de la ley de Walrás no requiere diferenciabilidad de la función de utilidad). Por otro lado, sabemos que la solución al problema se va a encontrar cuando el agente consuma bienes en proporciones constantes dadas por los argumentos de la función de mínimo:

$$\frac{x_1}{\beta_1} = \frac{x_2}{\beta_2}.$$

Lo anterior se debe a que, si el agente consume más de un bien que del otro, entonces la utilidad se va a ver limitada por el bien que consume menos. Por ejemplo, si asumimos que

$$\frac{x_1}{\beta_1} < \frac{x_2}{\beta_2}$$

entonces la utilidad del agente va a estar dada por el mínimo, que es x_1/β_1. Si aumentamos el consumo de x_1 y disminuimos el de x_2 hasta que se cumpla la igualdad, respetando siempre la restricción presupuestal, entonces la

utilidad del agente va a aumentar. Entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos variables:

$$\frac{x_1}{\beta_1} = \frac{x_2}{\beta_2} \qquad\qquad p_1x_1 + p_2x_2 = w$$

Despejando x_2 de la primera ecuación:

$$x_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1}x_1$$

Sustituyéndolo en la restricción presupuestal:

$$p_1x_1 + p_2\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}x_1\right) = w \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{w}{p_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}p_2}$$

Sustituyuendo en la expresión para x_2, obtenemos nuestras funciones de demanda para ambos bienes:

$$x_1(p_1, p_2, w) = \frac{\beta_1 w}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} \qquad\qquad x_2(p_1, p_2, w) = \frac{\beta_2 w}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2}$$

3.4.2 Sustitutos Perfectos: ejemplo de correspondencia de demanda

Hemos hablado de la correspondencia de demanda, pero el ejemplo que vimos anteriormente teníamos una función de demanda. Un ejemplo muy sencillo cuando puede haber funciones de demanda sustitutos perfectos. Por simplicidad, asumiremos que $p_1 = p_2 = 1$, y que las preferencias están dadas por $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. No resolveré aquí todo el Lagrangeano, pero por simplicidad asumiremos que $x_1^*, x_2^* > 0$. De las condiciones de primer orden tenemos que:

$$TMS(x_1, x_2) = 1 = 1 = \frac{p_1}{p_2}$$

Esta ecuación no añade información al problema de Kuhn-Tucker. Recordemos el ejemplo de la utilidad cuasi-lineal en la sección 3.3.1, en el Caso 1. Teníamos dos incógnitas: x_1 y x_2. Asimismo, tenemos dos ecuaciones: tasa marginal de sustitución igual a precios relativos, y la restricción presupuestal, gasto igual a ingreso. En este caso de sustitutos perfectos, en realidad nada más tenemos la restricción presupuestal, puesto que tasa marginal de sustitución igual a precios relativos no relaciona las incógnitas de ninguna manera.

Entonces, al sólo tener una sola ecuación con dos incógnitas, la correspondencia de demanda está completamente caracterizada por la restricción presupuestal:

$$x_1 + x_2 = w$$

Queda a los lectores verificar que la función de demanda se ve de la siguiente manera

$$x_1(p, w) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_1 > p_2 \\ \dfrac{\alpha w}{p_1},\ \alpha \in [0,1] & \text{si } p_1 = p_2 \\ \dfrac{w}{p_1} & \text{si } p_1 < p_2 \end{cases}$$

$$x_2(p, w) = \begin{cases} \dfrac{w}{p_2} & \text{si } p_1 > p_2 \\ \dfrac{(1-\alpha)w}{p_2},\ \alpha \in [0,1] & \text{si } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{si } p_1 < p_2 \end{cases}$$

En adelante trabajaremos casi exclusivamente con soluciones únicas y funciones de demanda.

3.5 Elasticidades y Agregaciones

Definimos la elasticidad de la demanda de x_l respecto del precio de x_k (donde l puede ser igual a k) como ε_{lk}, y la elasticidad ingreso de x_l como ε_{lw}.

La elasticidad precio de la demanda de x_l respecto del precio de x_k está dada por:

$$\varepsilon_{lk}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} \times \frac{p_k}{x_l(p,w)} = \frac{\partial \ln\left(x_l(p,w)\right)}{\partial \ln\left(p_k\right)}$$

La elasticidad de la demanda tiene la interpretación del cambio porcentual en la cantidad de un bien x_l respecto de cambios porcentuales en los precios. Es sencillo ver esto. Definimos un cambio porcentual marginal en una cantidad o en un precio como:

$$\Delta\%x_l = \frac{x_l' - x_l}{x_l} = \frac{\Delta x_l}{x_l} = \frac{dx_l}{x_l} \qquad \Delta\%p_k = \frac{p_k' - p_k}{p_k} = \frac{\Delta p_k}{p_k} = \frac{dp_k}{p_k}$$

Entonces la elasticidad resulta de dividir ambos cocientes.

La ventaja de medir cambios en elasticidades deviene de que es una medida que no requiere unidades, al estar toda expresada en términos porcentuales. Por ejemplo, si nos dicen *"El precio del frijol subió en 20 rands sudafricanos, con lo que la cantidad demandada por cierta persona disminuyó en 1 kilogramo"*. ¿Un incremento en 20 rands es mucho o poco? ¿Son 5 toneladas de frijol mucho o poco para para el consumidor sudafricano? Medir cambios absolutos se vuelve muy complejo. Lo que es más, con el paso del tiempo, puede que 20 rands deje de ser mucho, y empiece a ser poco si hay mucha inflación. ¿Cómo mantener los cambios en cantidades ante cambios en precios librándonos de estos problemas? La respuesta es elasticidades. Si nos dicen *"El precio del frijol en Sudáfrica aumentó 5%, con lo que el consumidor disminuyó sus compras en 0.2%"*, ya podemos interpretar mejor. Lo que es más útil, podemos comparar entre agentes en diversos países, con diversos hábitos de consumo y diversas divisas.

Ahora bien, decimos que un bien es:

- **Ordinario**, si ante aumentos en su precio, disminuye o al menos no aumenta la cantidad demandada: $\varepsilon_{ll} \leq 0$
- **Giffen**, si ante aumentos en su precio, aumenta la cantidad demandada: $\varepsilon_{ll} > 0$.

En los cursos introductorios de Economía, generalmente se conoce como "Ley de la Demanda" el que la cantidad demandada disminuya ante aumentos en el precio. Lamentablemente, no hay nada en la teoría que presentamos que garantice que ante aumentos en los precios, la cantidad demandada disminuye (o no aumenta). El nombre de "bienes Giffen" lo acuño Alfred Marshall en honor a Robert Giffen, quien señala que alguna vez describió un alza en los precios de un bien de la canasta básica (pan) que haga a un individuo relativamente tan pobre, que para hacer frente a esta relativa pobreza tenga que aumentar su consumo de pan.

Este estudio sugiere que el aumento en el precio no únicamente encarece un bien, sino que vuelve a los individuos relativamente más pobres: hay un efecto sustitución, en donde tratas de sustituir por bienes más baratos, y un efecto ingreso. Eugene Slutsky ya había identificado estos efectos con anterioridad, permitiendo variaciones compensatorias al ingreso tal que los agentes puedan nuevamente comprar la canasta que consumían con anterioridad al alza en precios. En esta nota trataremos únicamente las variaciones compensatorias a la Hicks, en vez de variaciones compensatorias a la Slutsky. Lo dejaremos una vez que veamos el problema de dualidad.

Ahora bien, podemos considerar no únicamente cambios en el precio del mismo bien que se analiza, sino cambios en los precios de los otros bienes. Decimos que un bien x_k es, respecto del bien x_l:

- un **sustituto bruto**, si ante aumentos en el precio de x_k, aumenta el consumo de x_l: $\varepsilon_{lk} > 0$
- **independiente en bruto**, si ante alteraciones en el precio de x_k no alteran la cantidad demandada de x_l: $\varepsilon_{lk} = 0$
- un **complemento bruto**, si ante aumentos en el precio de x_k, disminuye la cantidad demandada de x_l: $\varepsilon_{lk} < 0$

La idea de que estos efectos sean brutos sugiere la existencia de efectos netos. En efecto, como señalabamos anteriormente, existe un efecto sustitución y un efecto ingreso cuando hay cambios en los precios. Las demandas Marshallianas mezclan ambos efectos. El efecto ingreso puede fácilmente confundir si un bien es verdaderamente sustituto o complemento de otro. Como ejemplo, si el precio del pan sube, puede que los individuos consuman menos gasolina; esto no quiere decir que los individuos consuman sandwiches de gasolina, sino que quizás el individuo es más pobre, que decide dejar de manejar ante el alza en precios.

Por lo anterior, no hay tanto interés enlos sustitutos o complementos brutos. Nuevamente, cuando lleguemos al problema de minimización de gasto, veremos la definición de complementos y sustitutos netos.

La **elasticidad ingreso** de la demanda de x_l está dada por:

$$\varepsilon_{lw}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \times \frac{w}{x_l(p,w)} = \frac{\partial \ln\left(x_l(p,w)\right)}{\partial \ln\left(w\right)}$$

La interpretación de cambios porcetuales no cambia.

Por cierto, para los estudiantes que se preguntan por qué podemos escribir las elasticidades en términos de logaritmos, es bastante fácil demostrarlo. Definimos $x(w) = x\left(e^{\ln(w)}\right)$. Entonces:

$$\ln(x(w)) = \ln\left(x\left(e^{\ln(w)}\right)\right)$$

Utiliizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \ln(x(w))}{\partial \ln(w)} = \frac{1}{x(w)} \times \frac{\partial x(w)}{\partial w} \times e^{\ln(w)} = \frac{\partial x(w)}{\partial w} \times \frac{w}{x(w)}$$

Ahora bien, decimos que un bien es:

- **normal**, si ante aumentos en el ingreso, el consumo del bien aumenta o cuando menos no disminuye: $\varepsilon_{lw} \geq 0$. Dentro de los bienes normales, decimos que un bien es
  - un **lujo**, si ante aumentos en el ingreso, el consumo del bien aumenta más que proporcionalmente: $\varepsilon_{lw} > 1$
  - una **necesidad**, si ante aumentos en el ingreso, el consumo del bien aumenta proporcional o menos que proporcionalmente: $0 \leq \varepsilon_{lw} \leq 1$
- **inferior**, si ante aumentos en el ingreso, el consumo del bien disminuye: $\varepsilon_{lw} < 0$

Antes de pasar a las agregaciones, definimos la participación en el ingreso (*budget share*) $b_l(p,w)$ como la proporción del ingreso asignada a un bien determinado.

$$b_l(p,w) = \frac{p_l x_l(p,w)}{w}$$

Una vez que tenemos definidas las elasticidades, podemos establecer tres relaciones entre precios y cantidades a partir de la homogeneidad de la demanda, así como de la Ley de Walrás.

Si el sistema de demandas satisface la Ley de Walrás, entonces:

$$\sum_{l=1}^{L} b_l \varepsilon_{lw} = 1$$

El anterior resultado se denomina agregación de Engel. Es sencillo demostrarlo. Empecemos por la Ley de Walrás, y derivando ambos lados respecto a w:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l x_l(p,w) = w \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} = 1$$

Si multiplicamos al interior de la suma por 1, de la forma:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{x_l}{w}\frac{w}{x_l}\frac{\partial x_l}{\partial w} = \sum_{l=1}^{L} b_l \varepsilon_{lw} = 1$$

Este resultado señala que en incremento porcentual promedio ponderado en el gasto es igual al incremento porcentual en el ingreso. Una implicación inmediata es que no todos los bienes pueden ser inferiores.

Si el sistema de demandas satisface la Ley de Walrás, entonces:

$$b_k + \sum_{l=1}^{L} \varepsilon_{lk} b_l = 0$$

Este resultado se conoce como la agregación de Cournot. Partmimos nuevamente de la Ley de Walrás, y derivamos respecto del precio de un bien arbitrario x_k:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l}{\partial p_k} + x_k = 0$$

Multiplicamos ambos lados por p_k/w, y todos los términos al interior de la suma por $1 = x_l/x_l$, y obtenemos:

$$x_k \frac{p_k}{w} + \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l}{\partial p_k}\frac{p_k}{w}\frac{x_l}{x_l} = b_k + \sum_{l=1}^{L} b_l \varepsilon_{lk} = 0$$

Este resultado es un poco más difícil de interpretar en palabras lisas. No obstante, una de sus implicaciones es que si un bien es Giffen, $\varepsilon_{ll} > 0$, entonces tiene que tener al menos un complemento bruto $\varepsilon_{lk} < 0$ para alguna $k \neq l$. Más aún, dicha complementariedad debe ser fuerte, para lograr llevar el resultado de la suma a cero.

Si el sistema de demandas satisface homogeneidad de grado cero en precios e ingreso, entonces:

$$\varepsilon_{lw} + \sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{lk} = 0$$

Este resultado deviene del teorema de Euler sobre funciones homogéneas, y muestra cómo si todos los precios e ingreso cambian de manera proporcional, los efectos sobre la demanda se cancelan. Para obtenerlo, partimos de homogeneidad grado cero para la función de demanda de un bien l, $x_l(\alpha p, \alpha w) = x_l(p,w)$, y derivamos ambos lados respecto de α:

$$\frac{\partial x_l}{\partial w} w + \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l}{\partial p_k} p_k = 0$$

Dividiendo ambos lados entre x_l:

$$\frac{\partial x_l}{\partial w} \frac{w}{x_l} + \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_l} = \varepsilon_{lw} + \sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{lk} = 0$$

La utilidad de las agregaciones es que nos permiten establecer restricciones sobre los parámetros de las funciones de demanda al momento de realizar una estimación econométrica de un sistema de demandas. Una forma de proceder es suponer un sistema de ecuaciones que sea lineal en parámetros, por ejemplo:

$$\log x_l = \beta_l + \sum_{k=1}^{L} \beta_{lk} \log p_k + \gamma_l \log w + u_l \qquad \forall l = 1, \ldots, L$$

Una ventaja de este modelo es que los parámetros equivalen a las elasticidades. Podríamos usar mínimos cuadrados ordinarios para estimar cada ecuación de manera independiente. Esta aproximación tiene dos problemas: primero, los errores pueden estar correlacionados entre sí, y segundo, no estamos aprovechando la información que nos dan las agregaciones. Si bien la estimación de modelos de demanda escapa a esta nota, es bueno tener en mente que lo anterior se puede realizar mediante un modelo de *Seemingly Unrelated Regression Equations* (SURE), y realizar pruebas de hipótesis sobre los valores de las elasticidades de conformidad con las agregaciones.

3.6 Representaciones gráficas

Nuestro modelo con dos bienes nos permite graficar la función de demanda a partir de las curvas de indiferencia. En la figura 3.5 mostramos del lado izquierdo cómo se grafica una curva de demanda ante cambios en el precio del mismo bien, mientras que del lado derecho tenemos cómo se grafican ante cambios en el precio del otro bien. Arriba está la representación en un mapa de curvas de indiferencia, mientras que abajo se representan las funciones de demanda.

Empecemos con un incremento en el precio del mismo bien (lado izquierdo). Fijemos el precio del bien 2 en p_2 y supongamos que el precio del bien 1 incrementa de p_1 a p_1', y de p_1' a p_1''. En el mapa de curvas de indiferencia, este incremento se representa como una rotación hacia adentro de la restricción presupuestal: si bien podemos comprar la misma cantidad del bien 2, pues el precio está fijo, podemos comprar menos del bien 1. Para cada nueva restricción presupuestal, obtenemos la canasta óptima de consumo. En la gráfica de abajo, para p_1, p_1' y p_1'' dibujamos el punto que corresponde a la cantidad de la demanda y al precio respectivo, y unimos todos esos puntos para obtener la curva de demanda.

Para incrementos en el precio del otro bien (lado derecho), empecemos fijando el precio del bien 1 en $p_1 = 1$, y supongamos que el precio del bien 2 incrementa de p_2 a p_2', y de p_2' a p_2''. En el mapa de curvas de indiferencia, este incremento se representa como una rotación hacia abajo de la restricción presupuestal. Para cada nueva restricción presupuetal, obtenemos la canasta de consumo óptima. En la gráfica de abajo, recordemos que mantenemos constante el precio del bien 1 en $p_1 = 1$. En nuestros ejes no se indica el precio del bien 2, por lo que los cambios en el consumo del bien 1 corresponde a funciones de demanda distintas (un desplazamiento hacia adentro de la curva de demanda).

Así como podemos graficar el efecto ante cambios en los precios, podemos graficar el efecto ante cambios en el ingreso. La figura 3.6 muestra cómo cambia el consumo ante cambios en el ingreso. Del lado izquierdo tenemos la representación en un mapa de preferencias (curvas de indiferencia para dos bienes). La línea que une todas las canastas de consumo que son óptimas para cada nivel de ingreso se conoce como **curva de expansión del consumo**. Ésta se representa del lado derecho. La curva de expansión de consumo se grafica en un mapa de curvas de indiferencia. En la gráfica del lado izquierdo, ésta curva corresponde a la línea punteada.

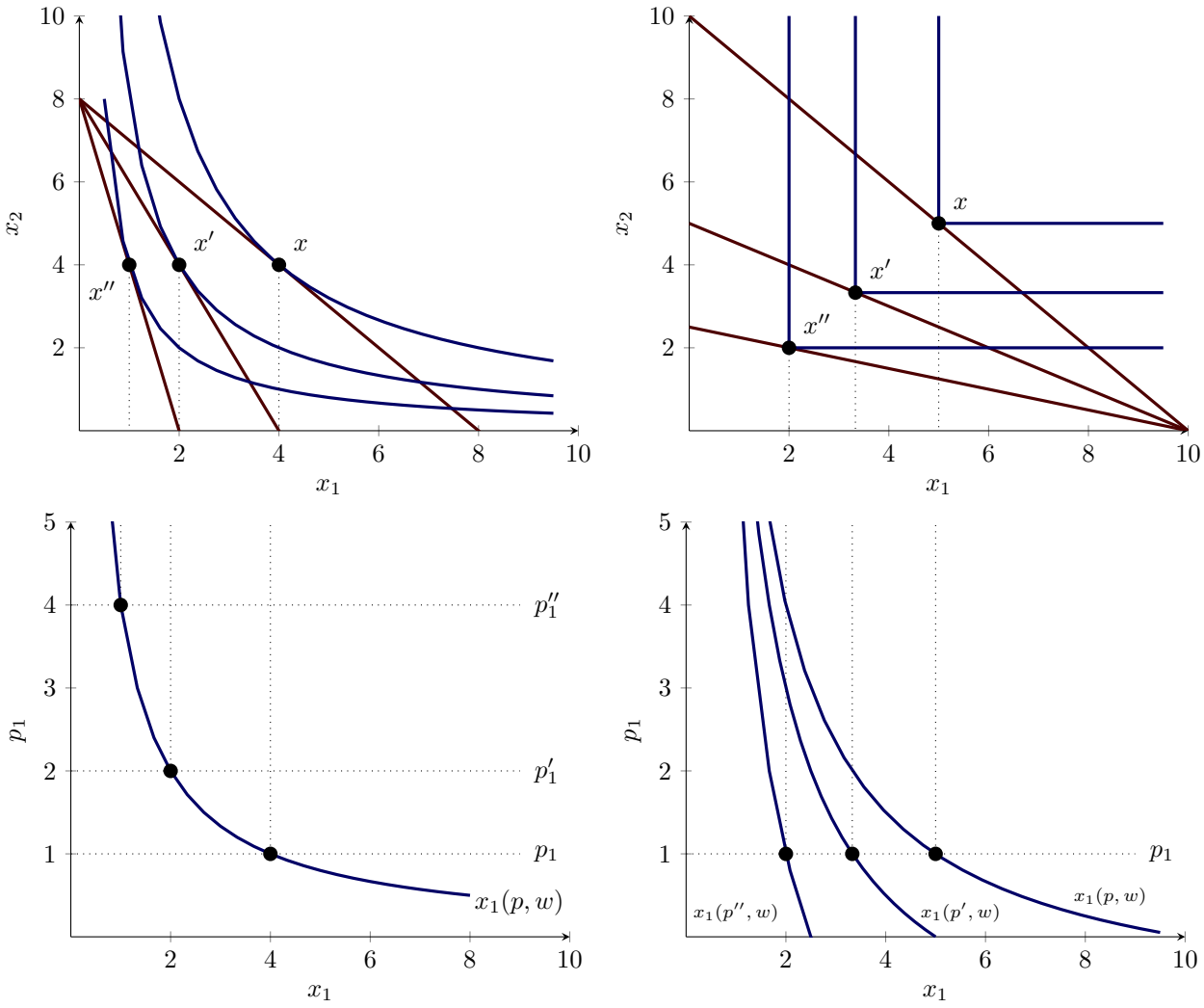


Figure 3.5: Función de Demanda Marshalliana

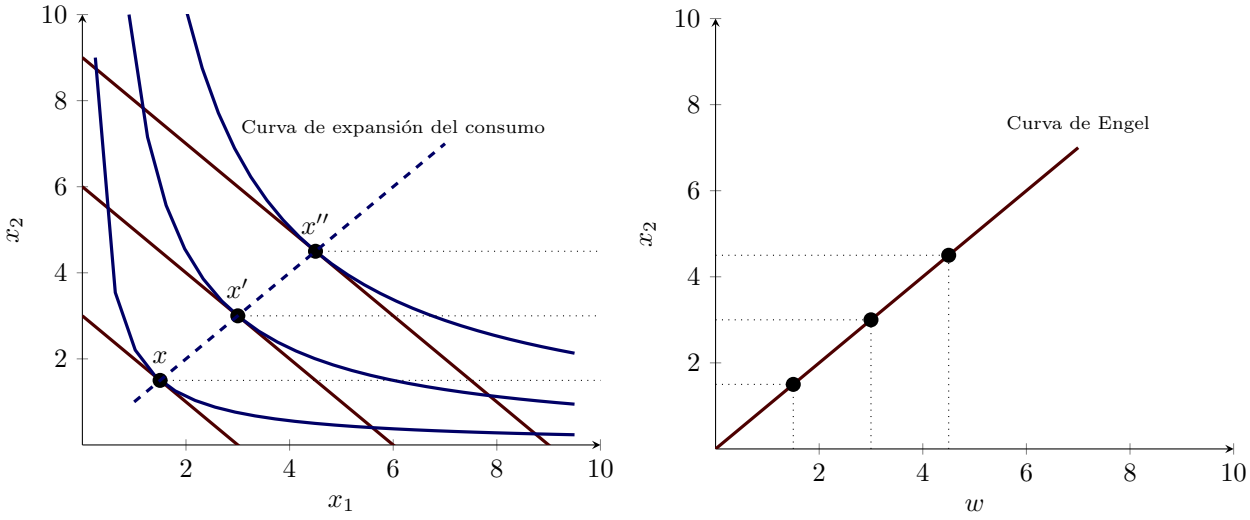


Figure 3.6: Expansión del consumo y Curva de Engel

Igualmente en la figura 3.6 del lado derecho, está graficada la cantidad demandada de x_2 como función del ingreso. A esta representación la denominamos curva de Engel.

3.7 La función de utilidad indirecta

La función de utilidad depende de la canasta que está consumiendo un agente: $u(x)$. No obstante, si en vez de considerar cualquier punto x, consideramos los puntos x que resulten del problema de maximización, es decir, la función de demanda (o algún punto dentro de la correspondencia, $x \in x(p,w)$ si la solución no es única), obtenemos la función de utilidad indirecta, $v : \mathbb{R}^L \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$V(p,w) = u(x(p,w)).$$

Esto es, la utilidad máxima que alcanzará el agente para cada nivel de precios e ingreso (p,w).

Trabajar con la función de utilidad indirecta permite realizar análisis del bienestar. Veamos un caso sencillo. Supongamos que las preferencias de un individuo están dadas por $u(x_1,x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Entonces, si utilizamos el método de Kuhn-Tucker, podemos obtener la función de demanda:

$$x_1(p_1,p_2,w) = \frac{w}{2p_1} \qquad x_2(p_1,p_2,w) = \frac{w}{2p_2}$$

De donde la función de utilidad indirecta está dada por:

$$V(p_1,p_2,w) = u(x_1(p_1,p_2,w), x_2(p_1,p_2,w)) = \frac{w}{2\sqrt{p_1 p_2}}$$

Supongamos ahora que el precio del bien x_1 aumenta de p_1 a $p_1' > p_1$. La nueva función de utilidad indirecta está dada por:

$$V(p_1',p_2,w) = \frac{w}{2\sqrt{p_1' p_2}}$$

Podemos hacer dos preguntas ahora. La primera es, ¿cuánto dinero adicional necesita el individuo para llegar al mismo nivel de utilidad que tenía antes? Esto es, queremos un cambio en el ingreso Δw que satisfaga $v(p_1', p_2, w + \Delta w) = v(p_1,p_2,w)$:

$$\frac{w+\Delta w}{2\sqrt{p_1' p_2}} = \frac{w}{2\sqrt{p_1 p_2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta w = w\left(\sqrt{\frac{p_1'}{p_1}} - 1\right) > 0$$

Pensémoslo así: si hay un incremento en el precio del bien x_1, empeora la situación del agente, puesto que ya sólo puede alcanzar niveles de utilidad más bajos. Entonces preguntamos, si éste es el caso, en cuánto debemos de aumentar su ingreso para asegurar que el individuo alcanza el mismo nivel de utilidad, es decir, que compre una canasta respecto de la cual es indiferente frente a la canasta inicial. La gráfica de la izquierda de la figura 3.7 muestra este cambio. El primer paso es la caída del ingreso, representado como una rotación hacia adentro en la restricción presupuestal; el segundo paso es el incremento en el ingreso, visto como un desplazamiento paralelo de la línea presupuestal hasta llegar a la línea punteada. Así, cuando los precios son (p_1,p_2) y el ingreso es w, el individuo consume la canasta x. Si el precio del bien 1 aumenta a p_1', pero a su vez es "compensado" con un incremento en el ingreso de Δw, el individuo pasaría a consumir x', y se mantendría en el mismo nivel de utilidad. En este sentido, Δw es un cambio en el ingreso que compensa al agente por la caída en precios; esta compensación es relativa a su nivel de utilidad inicial.

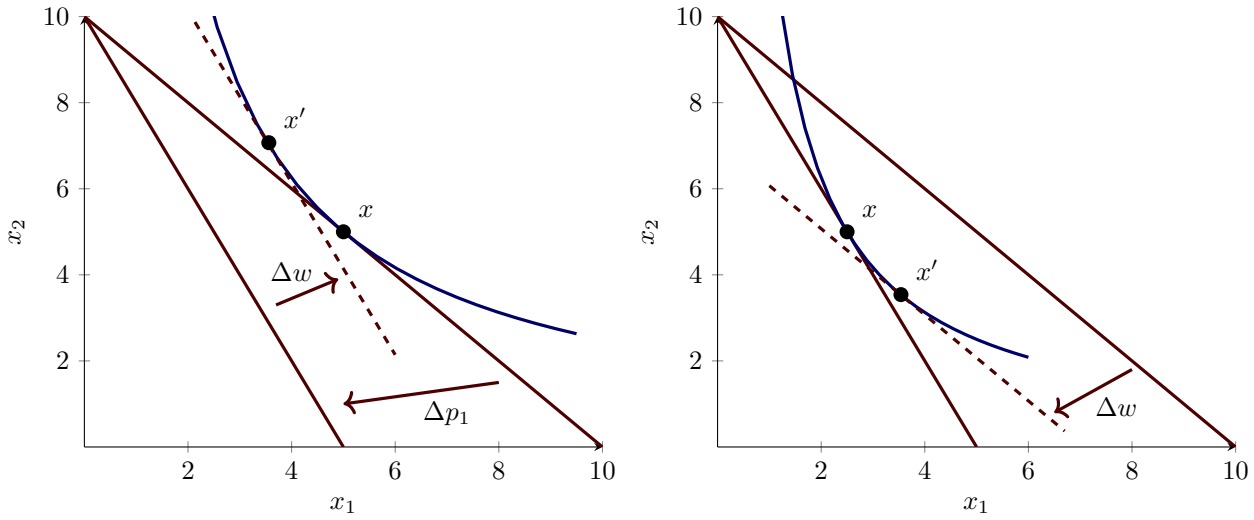


Figure 3.7: Utilidad indirecta y análisis del bienestar.

Una medida alternativa para medir el cambio en el bienestar no es considerar cómo compensar al agente por el cambio en precios, sino pensando en qué caída en el ingreso equivale al cambio en precios; una vez más, esta equivalencia la queremos en términos de utilidad. Para ver esto, fijémonos en la gráfica a la derecha en la figura 3.7, y nuevamente consideremos el incremento en el precio del bien 1. Después de este incremento en precios, el individuo consume la canasta x. Ahora, supongamos que no hubo cambio en precios, por lo cual mantenemos los precios relativos originales, y realizamos un desplazamiento paralelo de la restricción presupuestal hasta llegar a la línea punteada. Así, el agente consumiría x', y está en el mismo nivel de utilidad que si sólo hubiera aumentado el precio del bien 1.

Estos conceptos son de gran importancia, y retornaremos a ellos nuevamente.

3.7.1 Propiedades de la función de utilidad indirecta

Si la función de utilidad u es continua y representa preferencias localmente no saciables en $X = \mathbb{R}^L_+$, la función de utilidad indirecta satisface:

- Homogeneidad de grado cero en (p, w).
- Estrictamente creciente en w y no creciente en p_l para toda l.
- Cuasiconvexa.
- Continua.

Demostración:

Homogénea de grado cero. Por homogeneidad de grado cero en la corespondencia de demanda:

$$v(\lambda p, \lambda w) = u(x^*(\lambda p, \lambda w)) = u(x(p, w)) = v(p, w)\blacksquare$$

Creciente en w y no creciente en p: Para toda $w' > w$, $\sum_i p_i x_i(p, w) < w'$. Por no saciedad local, existe $\varepsilon > 0$ y una canasta dentro de una bola de radio épsilon $x' \in B_\varepsilon(x)$, tal que $p * x' \leq w'$ y $u(x') > u(x)$, por lo que $v(p, w') \geq u(x') > v(p, w)$.

Podemos hacer un argumento similar para no creciente en p_i. Supongamos que $p'_i > p_i$ y $p'_j = p_j$ para toda $j \neq i$. Entonces $\sum_i p'_i x_i(p, w) \geq w$ (puede ser igual en caso de que haya sustitutos o el agente no estuviera consumiendo

unidades de i de cualquier manera). El agente, por tanto, cambia a la canasta $x(p', w)$, con $u(x(p', w)) \leq u(x(p, w))$. Esto se debe a que, por no saciedad local, $\sum_i p'_i x_i(p', w) < w$. Otra vez por no saciedad local, si $x_i(p', w)$ no es solución cuando los precios son (p, w), es porque otorga una utilidad igual o inferior a $x_i(p, w)$.■

Cuasiconvexidad: Suponemos que $v(p, w) \leq \overline{v}$ y $v(p', w') \leq \overline{v}$. Demostraremos que para cualquier $\alpha \in [0, 1]$, $v(\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha w + (1-\alpha)w') \leq \overline{v}$. Notemos que para cualquier $x \in X$

$$\alpha p \cdot x + (1-\alpha)p' \cdot x \leq \alpha w + (1-\alpha)w'$$

Es el caso que (1) $p \cdot x \leq x$ o (2) $p' \cdot x \leq w'$. En el primer caso, $u(x) \leq v(p, w) \leq \overline{v}$, y en el segundo caso $u(x) \leq v(p', w') \leq \overline{v}$. Como esto es para cualquier $x \in X$,debe también ser cierto para el argumento que maximiza la utilidad cuando los precios e ingreso son $(\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha w + (1-\alpha)w')$.■

La propiedad de cuasiconvexidad de la función de utilidad indirecta señala que ante dos vectores de precios e ingreso respecto de los cuales el agente es indiferente (pues permiten comprar canastas que le dan la misma utilidad), promediarlos no puede mejorar la utilidad (y podría empeorarla).

Continuidad: esta es una implicación directa del Teorema del Máximo de Berge.

3.7.2 El Teorema de la Envolvente

Utilizar la función de utilidad indirecta permite obtener el efecto en términos de utilidad ante cambios en los parámetros del modelo: precios e ingreso. En concreto, ante cambios marginales, la utilidad marginal del ingreso y la utilidad marginal de los precios está dada por:

$$\frac{\partial v}{\partial w}(p, w) \qquad \frac{\partial v}{\partial p_i}(p, w)$$

El teorema de la envolvente nos permite encontrar soluciones más sencillas a estos problemas.

Vamos a salirnos tantito de la parte económica para explicar el teorema de la envolvente.

Teorema de la envolvente
Sean $f(x, \alpha)$ y $g(x, \alpha)$ dos funciones continuas y diferenciables, en donde $x \in \mathbb{R}^L$ es un vector de L variables y $\alpha \in \mathbb{R}^M$ un vector de M parámetros. Consideremos el problema de optimización:

$$\max_x \qquad f(x, \alpha) \qquad \text{s.a.} \qquad g(x, \alpha) \leq 0$$

Construimos el Lagrangeano de la forma:

$$\mathcal{L}(x, \alpha) = f(x, \alpha) - \lambda g(x, \alpha)$$

Denotemos como $x^*(\alpha)$ a la solución de este problema de maximización, $\lambda^*(\alpha)$ al multiplicador de Lagrange asociado a la restricción $g(x, \alpha)$ en el óptimo. Asumimos que la solución al problema de maximización es única. Nombramos **función valor** a la función objetivo $f(x, \alpha)$ evaluada en el punto óptimo:

$$v(\alpha) = f(x^*(\alpha), \alpha)$$

Si derivamos la función valor respecto de un parámetro $\alpha_m \in \alpha$:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_m}(\alpha) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_m}(x, \alpha)\bigg|_{x^*(\alpha)} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha), \alpha) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha), \alpha)$$

Esto es, la derivada de la función valor respecto de cualquier parámetro es igual a la derivada del lagrangeano respecto del mismo parámetro, evaluado en el óptimo.

A este último punto, es importante señalar que primero se deriva el Lagrangeano respecto del parámetro, y luego se sustituye x por $x^*(\alpha)$.

Demostración:

Primero, como $v(\alpha)$ es el resultado de un problema de optimización restringida, satisface las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker. En particular, es cierto que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha) - \lambda^*(\alpha)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha) = 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,L \tag{3.22}$$

$$\lambda^*(\alpha)g(x^*(\alpha),\alpha) = 0 \tag{3.23}$$

En donde la primera ecuación es la primera derivada del Lagrangeano, y la segunda es la condición de holgura. Por definición de la función valor, derivando respecto de α_m:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_m}(\alpha_m) = \left(\sum_{i=1}^{L}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha)\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_m}(\alpha)\right) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha),\alpha) \tag{3.24}$$

Consideramos el caso en que la restricción $g(x,\alpha)$ no está activa y el caso en que lo está.

Caso 1: Asumimos que $g(x(\alpha)) < 0$, y por tanto $\lambda^*(\alpha) = 0$. En el margen, el problema se comporta como uno de optimización no restringida.

No obstante, dado que $\lambda^*(\alpha) = 0$, de la ecuación (1) tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^*(\alpha),\alpha) = 0$$

Sustituimos en la ecuación (3):

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_m}(\alpha_m) = \left(\sum_{i=1}^{L}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha)\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_m}(\alpha)\right) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha),\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha),\alpha)$$

Esto demuestra el teorema de la envolvente cuando la restricción no está activa, puesto que $\lambda^*(\alpha) = 0$.

Caso 2: Asumimos que $g(x^*(\alpha),\alpha) = 0$. Dado que la función valor es de la clase C^1. De la ecuación (1) tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha) = \lambda^*(\alpha)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha) \qquad \forall i \in \{1,\ldots,L\}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la función (3):

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_m} = \lambda^*(\alpha)\sum_{i=1}^{L}\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha)\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_m}(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x^*(\alpha),\alpha) \tag{3.25}$$

Ahora, como asumimos que $g(x^*(\alpha),\alpha) = 0$ en el óptimo, por el teorema de la función implícita sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha)\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_m}(\alpha)\right) + \frac{\partial g}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha),\alpha) = 0$$

Despejando:

$$\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*(\alpha),\alpha)\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_m}(\alpha)\right) = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha),\alpha)$$

Y sustituyendo en la ecuación (4):

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_m} = -\lambda^*(\alpha)\frac{\partial g}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha),\alpha) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}(x^*(\alpha),\alpha)$$

Esta expresión es igual al teorema de la envolvente cuando asumimos que la restricción está activa.■

A menudo nos interesa saber cómo cambia la función objetivo en el óptimo cuando alteramos uno de los parámetros (no son variables de elección en el problema de optimización). El teorema de la envolvente señala que no tenemos que optimizar nuevamente, sino que podemos tomar el Lagrangeano, derivarlo respecto del parámetro (lo cual puede ser más sencillo), y posteriormente evaluarlo en el óptimo.

3.7.3 Utilidad en términos de dinero

Un resultado que salta a la vista, usando el teorema de la envolvente, es que $\lambda^*(p,w)$ denota la utilidad marginal del ingreso:

$$\frac{\partial v}{\partial w}(p,w) = \lambda^*(p,w)$$

Así, el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestal, λ^*, permite normalizar la utilidad marginal. Si bien la utilidad marginal de un bien no tiene significado pues la utilidad es ordinal, al dividirla por la utilidad marginal del dinero λ^*, se traduce la utilidad marginal de un bien x_i en términos de dinero.

Es posible entonces darle otra interpretación a las condiciones de Kuhn-Tucker en adición a la de tasa de cambio marginal entre el mercado y el individuo. Recordemos la condición de primer orden de Kuhn-Tucker respecto a marginalidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x_l}(x^*) - \lambda^* p_l = 0 \mu_l x_l^* = 0 \quad \forall l$$

Si asumimos que $x_l^* > 0$ (el consumo de x_l es positivo), entonces necesariamente $\mu_l^* = 0$ para satisfacer la condición de holgura.

Entonces vemos que la utilidad marginal del bien l es igual al precio del mismo bien i multiplicado por λ^*, donde λ^* es la utilidad marginal del dinero. Esto permite normalizar la utilidad marginal del bien l en el óptimo (una medida meramente ordinal) a una utilidad marginal en términos de dinero (interpretación monetaria y cardinal):

$$\frac{u_i(x^*)}{\lambda^*} = p_i$$

En donde u_i/λ^* es la utilidad marginal expresada en términos de dinero.

Esto quiere decir que en el óptimo, la utilidad en dinero de una unidad adicional del bien x_l es igual al precio del mismo bien. Entonces, si un individuo decide consumir unidades adicionales de x_l, recibiría p_l de utilidad en dinero, y pagaría p_l unidades de dinero, por lo que en el neto no tendría ganancias. Por lo tanto, no tiene incentivos a incrementar ni a disminuir su consumo de x_l.

"Estoy dispuesto a pagar hasta \$10 pesos por un chocolate, y el precio del chocolate es de \$10 pesos. Si me lo compro, en el neto no gano nada. Mejor no me lo compro, y me ahorro una ida a la tienda."

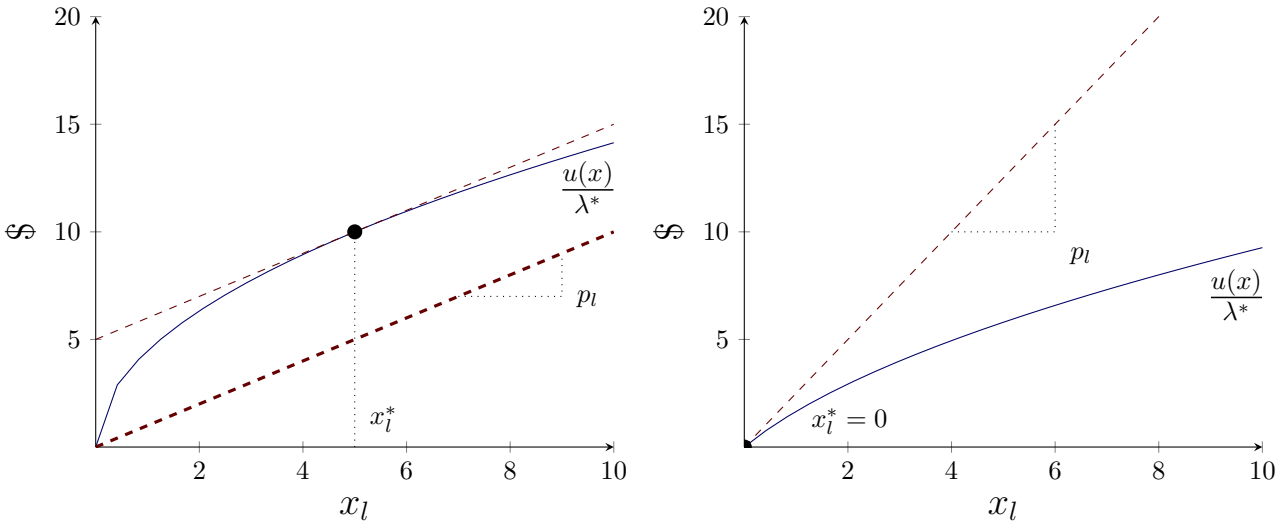


Figure 3.8: Utilidad en términos del dinero.

Por otro lado, podemos considerar el caso de que $x_i^* = 0$ y $\mu_i^* > 0$, por las condiciones de holgura. Entonces nuevamente en la primera ecuación:

$$\frac{u_i(x^*)}{\lambda^*} = p_i - \frac{\mu_i^*}{\lambda_i^*} < p_i$$

En este caso, si el individuo está consumiendo 0 unidades de x_i en el óptimo, es porque la utilidad marginal en dinero de consumir una unidad adicional es menor que el precio que tiene que pagar por ella.

"Estoy dispuesto a pagar hasta \$10 pesos por un chocolate, y el precio del chocolate es de \$12 pesos. Mejor no me lo compro, ya que está muy caro."

En la figura 3.8 del lado izquierdo vemos cómo si normalizamos la utilidad $u(x)$ por λ^* es como expresar la utilidad en términos de dinero. En el óptimo, la utilidad marginal de x_i es igual al costo marginal de x_i. Como el precio p_i está fijo, el costo marginal de x_i es igual a p_i. Si el individuo consume cero unidades de x_i (gráfica derecha), es porque el costo marginal supera a la utilidad marginal incluso para la primera unidad. Por lo tanto, el individuo prefiere no consumir x_i.

Si bien la interpretación anterior es ilustrativa en el sentido de utilidad marginal igual al costo marginal, tiene el problema de que, para llegar a la misma, es necesario primero obtener el valor de λ^*. λ^*, veremos más adelante, es la utilidad marginal del dinero, y ésta no es constante, sino que varía con el nivel de ingreso, con los precios, y con la canasta en la que se esté consumiendo. Podemos entonces encontrar una interpretación distinta.

3.7.4 La identidad de Roy

Identidad de Roy
Si $u(x)$ es una función de utilidad continua que representa preferencias **estrictamente convexas** y **localmente no saciables** sobre $X \subseteq \mathbb{R}^L$, y la función de utilidad indirecta, dada por $v(p,w)$, es diferenciable en (p,w), entonces:

$$x_l(p,w) = -\frac{\partial v/\partial p_l}{\partial v/\partial w} \qquad \forall l$$

En notación matricial:

$$x(p,w) = -\frac{1}{D_w v(p,w)} D_p v(p,w) = -\frac{1}{D_w v(p,w)} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial p_1} \\ \frac{\partial v}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial p_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(p,w) \\ x_2(p,w) \\ \vdots \\ x_L(p,w) \end{pmatrix}$$

(Pseudo)demostración para el caso en que u sea diferenciable

Recordamos que el Lagrangeano de UMAX está dado por:

$$\mathcal{L}(x,\lambda,p,w) = u(x) - \lambda(p\cdot x - w) - \mu \cdot x$$

Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(p,w) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}(x^*(p,w),\lambda^*(p,w),p,w) = -\lambda^*(p,w)x_i^*(p,w)$$

$$\frac{\partial v}{\partial w}(p,w) = \lambda^*(p,w) > 0$$

De donde $\lambda^*(p,w) > 0$ es una consecuencia directa de las preferencias localmente no saciables (notemos que sin preferencias localmente no saciables, es posible que $\lambda^* = 0$, por lo que la identidad de Roy no estaría definida). Entonces:

$$-\frac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial w} = \frac{\lambda^*(p,w)x_i^*(p,w)}{\lambda^*(p,w)} = x_i(p,w)$$

La identidad de Roy relaciona la función de utilidad indirecta con las funciones de demanda. Veamos un ejemplo rápido. Habíamos mencionado que la función de utilidad indirecta para la función de utilidad Cobb-Douglas $u(x_1,x_2) = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ es:

$$v(p_1,p_2,w) = \frac{w}{2\sqrt{p_1p_2}}$$

Obteniendo las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = -\frac{w}{4p_1^{\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{1}{2p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}}$$

De donde:

$$-\frac{\partial v/\partial p_1}{\partial v/\partial w} = \frac{2wp_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}}{4p_1^{\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{w}{2p_1} = x_1(p_1, p_2, 2)$$

El mismo procedimiento puede ser utilizado para encontrar la función de demanda del bien x_2. En ejercicios, una manera de corroborar que la función de demanda y de utilidad indirecta obtenidas son las correctas es utilizar la identidad de Roy.

Es sencillo interpretar la identidad de Roy. Primero, un cambio en el precio p_i implica que tenemos que pagar más (o menos) por las $x_i^*(p, w)$. Si la utilidad fuera cardinal y expresada en términos de dinero, eso sería todo lo que tendríamos que hacer; pero como es ordinal, derivar la función valor nos da el efecto de pagar más por las $x_i^*(p, w)$ unidades expresado en términos de "utiles". No nos interesan los utiles, así que lo dividimos entre la utilidad marginal del dinero $\lambda^*(p, w)$ para convertir la expresión en términos de unidades de x_i.

La razón por la que la identidad de Roy requiere que las preferencias sean estrictamente convexas es porque, como demostramos en la sección 3.4, lo anterior garantiza que la solución a UMAX sea única. La identidad de Roy, no obstante, puede funcionar en ausencia de convexidad estricta, siempre y cuando haya una solución única. Retomemos las preferencias de sustitutos perfectos con función de utilidad $u(x) = x_1 + x_2$ que vimos en la sección 3.4.2. La función de utilidad indirecta está dada por:

$$v(p_1, p_2, w) = \begin{cases} \dfrac{w}{p_2} & \text{si } p_1 > p_2 \\ \dfrac{w}{p_1} = \dfrac{w}{p_2} & \text{si } p_1 = p_2 \\ \dfrac{w}{p_1} & \text{si } p_1 < p_2 \end{cases}$$

Si $p_1 > p_2$, entonces $v(p_1, p_2, w) = w/p_2$. Si utilizamos la identidad de Roy:

$$-\frac{\partial v/\partial p_1}{\partial v/\partial w} = 0$$
$$-\frac{\partial v/\partial p_2}{\partial v/\partial w} = \frac{w}{p_2}$$

Obtenemos las funciones de demanda, porque son únicas. Pero si estamos en el caso de $p_1 = p_2$, existe una correspondencia de demanda, por lo que una única derivada no nos puede otorgar toda la correspondencia. Más aún, a partir de $p_1 = p_2$, cualquier cambio infinitesimal en alguno de los precios hace que la solución pase de interior a esquina, por lo cual no podemos hacer uso de derivadas.

Ahora bien, párrafos arriba mostramos una demostración para el caso en que u es diferenciable. ¿Si u no es diferenciable, entonces ya no se puede usar la identidad de Roy? Sí podemos, pues la Identidad de Roy no requiere diferenciabilidad. La razón es que una demostración más robusta de la Identidad de Roy hace uso del **teorema de dualidad**, pero que requiere mayor bagaje matemático que el necesario para esta nota.

Veamos un caso de una función de utilidad no diferenciable, pero en el que sí tenemos una solución única: complementos perfectos. Por simplicidad, asumimos que la función de utilidad está dada por $u(x) = min\{x_1, x_2\}$. Podemos demostrar que en el óptimo, $x_1 = x_2$. Esbozaremos rápidamente cómo demostrarlo. La función es monótona, por lo que cumplirá la Ley de Walrás. Si $x_1 > x_2$, y $p_1x_1 + p_2x_2 = w$, entonces el individuo podría disminuir su consumo de x_1 sin disminuir su utilidad, liberando recursos para gastar en otra canasta que aumente la utilidad.

Tenemos entonces dos ecuaciones con dos incógnitas. La primera ecuación es $x_1 = x_2$, y la segunda es $p_1x_1 + p_2x_2 = w$. Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$x_1(p_1, p_2, w) = x_2(p_1, p_2, w) = \frac{w}{p_1 + p_2}$$

Y la función valor está dada por:

$$v(p_1, p_2, w) = \frac{w}{p_1 + p_2}$$

Para la identidad de Roy:

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = \frac{\partial v}{\partial p_2} = -\frac{w}{(p_1 + p_2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{1}{p_1 + p_2}$$

De donde, por la identidad de Roy:

$$x_1(p_1, p_2, w) = x_2(p_1, p_2, w) = -\frac{\partial v/\partial p_1}{\partial v/\partial w} = \frac{w}{p_1 + p_2}$$

Homoteticidad y la función de utilidad indirecta
Un resultado que no demostraremos es que todas las funciones de utilidad homotéticas dan origen a funciones de demanda que son homogéneas de grado 1 en el ingreso, es decir:

$$x_i(p, w) = w \cdot x_i(p, 1) \qquad \forall i = 1, \ldots, L$$

Por lo mismo, si la función de utilidad es homogénea de grado 1, la función de utilidad indirecta es homogénea de grado uno en el ingreso. Esto es, si $u(\lambda x) = \lambda u(x)$, entonces $v(p, w) = w \cdot v(p, 1)$.
Los lectores podrán corroborar por su cuenta dos resultados. Primero, es que la utilidad marginal del dinero es constante $\partial v/\partial w = v(p, 1)$. Segundo, la elasticidad ingreso para cada uno de los bienes es constante e igual a 1, $\varepsilon_{iw} = 1$. Entonces, ¿es bueno o malo asumir homoteticidad?

4 Demanda de Slutsky

En esta sección, analizaremos el efecto de tener, en vez de un ingerso fijo, un ingreso dado en dotaciones. Esto es, el individuo en vez de levantarse cada mañana y tener w en su cuenta de banco, tiene una cantidad ω (omega) de bienes que puede vender; así, pensamos que el ingreso es el resultado de vender esta dotacaión, $w = p \cdot \bar{x}$. Esto supone que no hay costos de transacción, es decir, el precio de compra es el precio de venta para cada bien, y no hay ningún otro costo para adquirir o vender los bienes. Podemos pensar en sociedades agrarias en donde el ingreso proviene de la venta de los bienes que se cosechan. Podemos pensar en una definición más amplia de bienes en que los individuos pueden vender su tiempo a cambio de un salario para comprar otros bienes de consumo.

El análisis que hasta ahora hemos hecho de las preferencias no cambia, ni tampoco el que los individuos maximicen su utilidad. Lo único que cambiará es su restricción presupuestal:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l x_l \leq \sum_{l=1}^{L} p_l \omega_l$$

En la desigualdad anterior, mientras que cada x_l será una variable de elección para el individuo, ω_l es un parámetro dado: es la dotación inidial del individuo. En el caso de dos bienes, la frontera presupuestal se ve de la forma:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Gráficamente:

1. Graficamos la dotación inicial del individuo, ω.
2. Graficamos la recta presupuestal, que es la recta que pasa por ω, y tiene pendiente $-\frac{p_1}{p_2}$.

Es importante señalar que la recta presupuestal siempre pasa por la dotación inicial. A manera de ejemplo, si la dotación inicial es $\omega_1 = 2$ y $\omega_2 = 6$, y los precios son $p_1 = p_2 = 1$, entonces la restricción presupuestal se ve como en la figura 4.1.

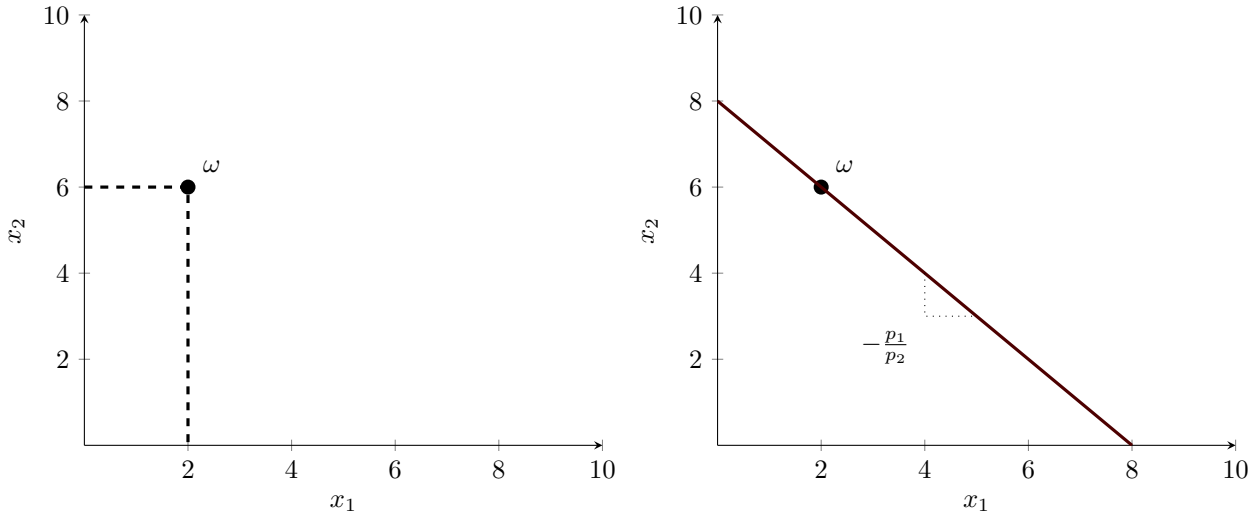


Figure 4.1: Restricción presupuestal con dotación.

Ante cambios en en uno de los precios, el conjunto presupuestal no necesariamente se va a reducir, a diferencia del caso de las demandas marshalianas. Claro que los consumidores con un salario fijo w se ven perjudicados por

un aumento en el precio de alguno de los bienes. Por ejemplo, si hay escacez de leche en el país, y sube el precio, la mayoría de las familias estarían en peor condiciones. Pero pensemos en un ganadero productor de leche. Ante un aumento en el precio de la leche, dicho ganadero gana más de la venta de su producto.

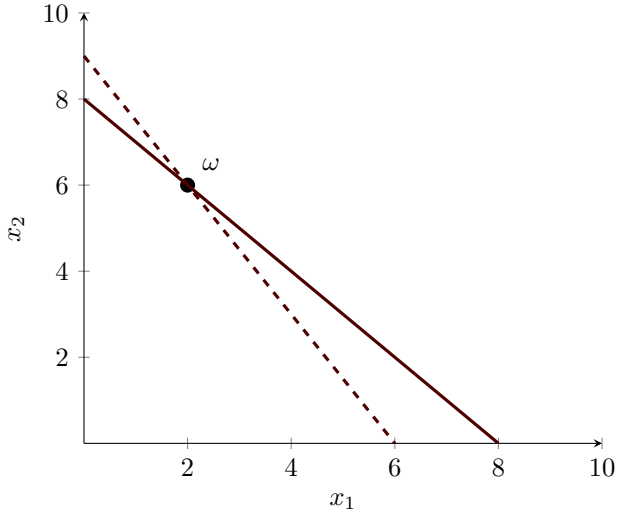


Figure 4.2: Restricción presupuestal con dotación.

Algo que se deja a los lectores, es corroborar que en el caso de que los individuos tengan dotaciones, lo importante es el precio relativo de los bienes, y no el nivel absoluto de los precios. A manera de ejemplo, en el caso de dos bienes, que el precio del bien 1 se duplique es equivalente a que el precio del bien 2 se reduzca a la mitad: la restricción presupuestal no cambia. Esto contrasta con el ingreso fijo en que usamos para la demanda marshalliana, en donde duplicar el precio del bien 1 reduce el conjunto presupuestal, pero reducir a la mitad el precio del bien 2 incrementa el conjunto presupuestal.

Partamos de un escenario con la dotación anterior, y precios $p_1 = p_2 = 1$, y supongamos que el precio del bien 1 aumenta a 1.5. Entonces, la pendiente de la restricción presupuestal pasa de -1 a -1.5, por los precios relativos, pero la nueva restricción aún pasa por la dotación inicial. Esto se muestra en la gráfica 4.2 con la restricción inicial mostrada como una recta sólida, y la nueva restricción como una recta punteada.

En este sentido, el efecto del cambio en los precios es ambiguo, puesto que un incremento en precios beneficia a los vendedores netos del producto, pero puede perjudicar a los compradores netos del mismo.

4.1 Maximización de utilidad y demanda de Slutsky

Podemos plantear nuestro problema de maximización de utilidad de la misma manera, pero cambiando la restricción presupuestal:

$$\max_{x \in X} \quad u(x) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{L} p_i x_i \leq \sum_{i=1}^{L} p_i \bar{x}_i$$

La solución del problema es un conjunto de demandas "Slutskianas" (en vez de Marshallianas), porque en vez de depender de los precios y un ingreso fijo, dependerán de los precios y el vector de dotaciones. Llamaremos a esta otra correspondencia de demanda $\hat{x}(p, \bar{x})$ para diferenciarla de la demanda marshalliana $x(p, w)$. Entonces:

$$\hat{x}(p, \bar{x}) = \arg \max_{x \in X} \quad u(x) \quad \text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{L} p_i x_i \leq \sum_{i=1}^{L} p_i \bar{x}_i$$

Esta función de demanda satisface propiedades similares a la demanda marshalliana, y demostrar estas propiedades se puede realizar de una manera similar. Por tanto, omitiremos la prueba.

- Homogeneidad grado cero en precios: $\hat{x}(\lambda p, \bar{x}) = \hat{x}(p, w)$.
- Ley de Walrás: $p \cdot \hat{x}(p, \bar{x}) = p \cdot \bar{x}$.
- Si u es cuasicóncava, $\hat{x}(p, \bar{x})$ es convexa. Si u es estrictamente cuasicóncava, $\hat{x}(p, \bar{x})$ es solución única.

Además, podemos definir como el exceso de demanda como:

$$z(p, \omega) = \hat{x}(p, \omega) - \omega$$

Para un bien individual:

$$z_l(p, \omega) = \hat{x}_l(p, \omega) - \omega_l$$

Este exceso de demanda nos dice cuánto demanda el individuo de un bien, en exceso de su dotación inicial. Si el exceso de demanda es positivo, el individuo compra unidades adicionales del bien en el mercado, y lo denominamos un **comprador neto**. Si el exceso de demanda es negativo, el individuo vende unidades en el mercado, y lo denominamos un **vendedor neto**. Si el exceso de demanda es cero, en general decimos que el individuo es autosuficiente en el bien.

Como anticipamos, mientras que un incremento en los precios perjudica a un consumidor con un ingreso fijo, el efecto es ambiguo para un consumidor con dotaciones. Supongamos que un agente tiene una dotación inicial de $(\omega_1, \omega_2) = (4, 4)$ y enfrenta precios de $(p_1, p_2) = (1, 1)$. Y supongamos que el precio del bien 1 aumenta a 1.5. ¿Un consumidor se vería beneficiado o perjudicado de este movimiento?

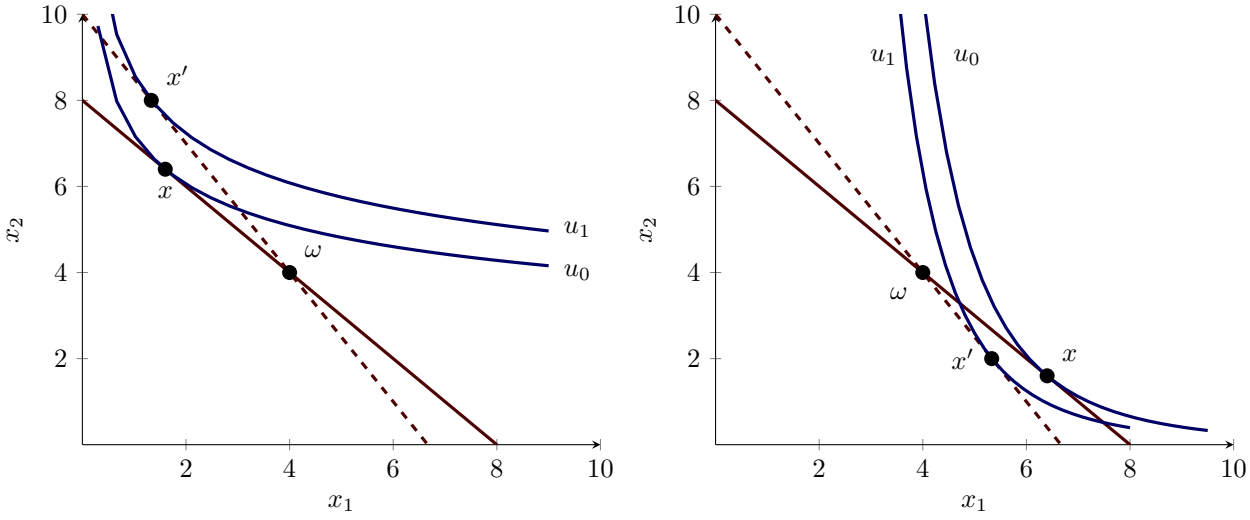


Figure 4.3: Restricción presupuestal con dotación.

En la figura 4.3, vemos cómo al agente a la izquierda, el incremento en el precio del bien 1 le beneficio, pues pasó de consumir x a consumir x', y su nivel incrementó de u_0 a u_1 (curva de indiferencia más alejada del origen). Por el contrario, el agente a la derecha vio perjudicada su situación, pues pasó de consumir x a consumir x', y su nivel de utilidad cayó de u_0 a u_1 (curva de indiferencia más cercana al origen).

Es claro por qué el agente a la drecha se beneficia de un incremento en el precio: el agente es un vendedor neto del bien 1, y por tanto, un incremento en el precio del bien 1 incrementa su ingreso real. Lo que es menos claro es por qué el agente a la derecha se perjudica del incremento en precio del bien 1. Claro, al ser un comprador, el incremento en el precio del bien 1 reduce su ingreso real. No obstante, dicho consumidor podría haber elegido

empezar a vender el bien 1 en vez de comprarlo. Si bien esto es una posibilidad, en este caso en particular, vender del bien 1 no le generaba suficiente ganancia como para comenzar a hacerlo. A la izquierda en la figura 4.4, vemos que el agente a la derecha no puede comenzar a vender el bien 1 para mejorar su utilidad, pues en cada punto de la nueva recta presupuestal, su utilidad es menor a la que tenía antes del incremento en el precio.

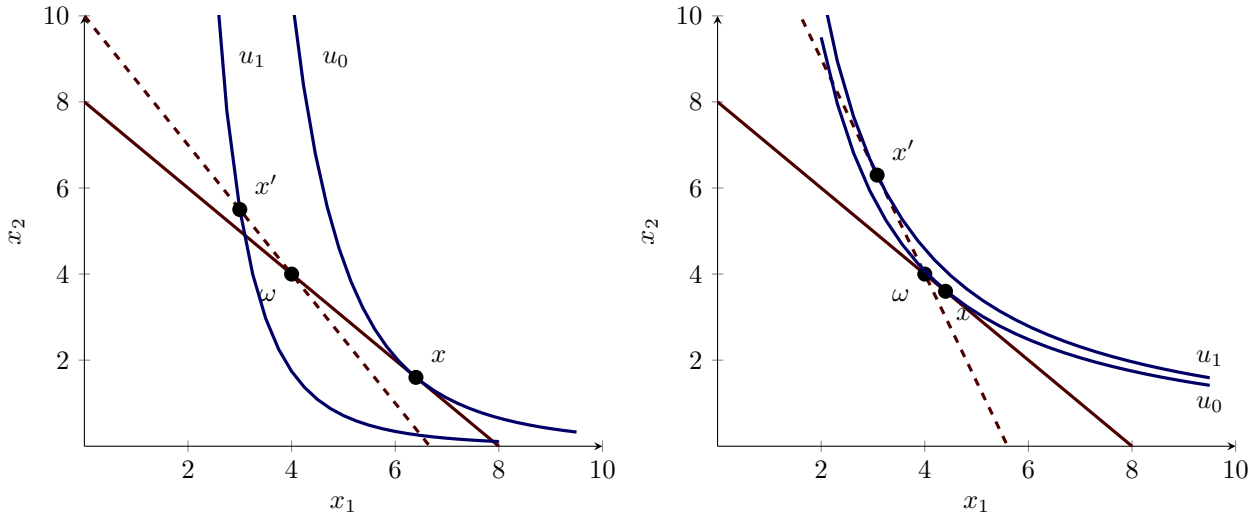


Figure 4.4: Restricción presupuestal con dotación.

Esto no siempre es el caso. En la figura 4.4 a la derecha, vemos cómo para este consumidor, es posible que, ante el aumento en el precio del bien 1, pasar de comprarlo a venderlo le genere una ganancia en utilidad. En general, para que un comprador neto pase a ser vendedor neto, se necesita que sus compras netas sean muy pequeñas (consumo muy cercano a la dotación inicial), y que el incremento en el precio del bien sea muy grande. Si además queremos que el agente incremente su utilidad, estos efectos tienen que ser más pronunciados.

En general, para cambios en el precio relativo de un bien, el efecto en bienestar para un individuo será:

	Comprador neto	**Vendedor neto**
$\uparrow p_l$	Efecto ambiguo	Incremento en bienestar
$\downarrow p_l$	Incremento en bienestar	Efecto ambiguo

Para ver gráficamente el efecto de una reducción de precios, podemos referirnos a las gráficas anteriores, considerando que el incremento en el precio del bien 1 es equivalente a una reducción proporcional en el precio del bien 2.

4.2 Aplicaciones de la demanda de Slutsky

Esta forma de considerar el problema del consumidor, con restricción a una dotación y no a un ingreso fijo, permite analizar modelos de demanda más completos. Por ejemplo, un agente que no únicamente demanda bienes de consumo, sino que también ofrece su trabajo al mercado a cambio de un salario. Otros casos muy utilizados son los de consumo intertemporal, en donde un agente tiene un ingreso en cada período de tiempo, y puede intercambiar consumo entre períodos por medio de un mercado de deuda, ya sea pidiendo un crédito, o ahorrando en un banco. Finalmente, es un modelo utilizado en decisiones bajo incertidumbre, donde consideramos que los agentes tienen un ingreso potencial entre varios estados de la naturaleza (por ejemplo, un agricultor que puede tener una buena cosecha si hay lluvia o una mala cosecha si no hay lluvia), y el individuo intercambia consumo entre estados de la naturaleza por medio de un mercado de seguros.

En esta sección, omitiré el análisis gráfico, puesto que no cambioa de lo realizado anteriormente.

4.2.1 Consumo intertemporal

En esta ocasión supondremos a un individuo que vive n períodos, con utilidad por un bien homogéneo c en cada período, y función de utilidad $U(\bar{c})$ en donde $\bar{c}$ es un vector de cantidades $(c_1, ..., c_T)$, y donde cada c_t representa el consumo del individuo en el período t. Asimismo, el individuo contará con una dotación de w_t unidades de consumo en cada período t. El precio del bien de consumo c en el período t es igual a p_t. Las unidades de consumo son no duraderas, y se extinguen en cada período, (por ejemplo, alimentos que se agontan cuando los consumes una vez, a diferencia de una televisión que puede durar varios años).

Adicionalmente, existe un mercado de crédito y ahorro mediante el cual el individuo puede pasar su dotación del futuro al presente (se endeuda hoy, pero lo tendrá que pagar con sus recursos el día de mañana), o en sentido inverso, pasar dotación presente al futuro (mediante ahorro). Para esto, en cada período, el banco cobra/paga una tasa de interés r_t por endeudarse/ahorrar en el período t, y retirarlo en el período $t+1$. En este sentido, para ejemplificar, supongamos que el precio p se mantiene constante en el tiempo e igual a 1. Si el individuo quiere consumir $(1+r_t)$ en $t+1$, deberá sacrificar el día de hoy 1 unidad del bien c_t. De tal suerte tenemos que la tasa a la que el mercado cambia consumo futuro por consumo presente es:

$$\frac{\Delta c_{i+1}}{\Delta c_i} = -(1+t)$$

Notamos que éste es el precio relativo de pasar consumo presente al futuro. En general, tenemos que el precio relativo sería igual a:

$$\frac{\Delta c_{t+1}}{\Delta c_t} = -\frac{p_t}{p_{t+1}}(1+r_t)$$

Es decir, si yo el día de hoy sacrifico p_t (equivalente a una unidad de consumo, ya que una unidad de consumo vale p_t en el período t), el día de mañana ese p_t va a sumar $p_t(1+r_t)$ por el pago de intereses. No obstante, el día de mañana que tenga este ingreso adicional, voy a tener que pagar p_{t+1} por ese bien, por lo que este ingreso que tendré en el futuro por sacrificar consumo presente, lo tengo que dividir entre el precio del futuro para tener este ingreso del futuro en términos de unidades de consumo.

Ahora bien, para pasar a construir una restricción presupuestal, necesitamos tener tanto el precio de los bienes como el precio de la riqueza en valor presente. Para esto, basta notar que si lo que ahorramos hoy nos da $1+r_1$ el siguiente período, y si eso mismo lo ahorro en ese período, el período que le sigue tendré $(1+r_1)(1+r_2)$, y así sucesivamente. Por lo cual, si lo ahorro hasta T períodos, tendré al final $\prod_{i=1}^{T-1}(1+r_t)$, para el caso en que $r_t = r$, $\forall i$, al final tendrá $(1+r)^{t-1}$. Notamos que esto es en valor futuro, y está en cantidades, y no en precios. Para traerlo a valor presente, basta con dividir entre $1+r_t$ respectivo y multiplicar por su respectiva p_i. Al final, obtendremos una restricción de la forma:

$$p_1 c_1 + \sum_{t=2}^{T} \frac{p_t c_t}{\prod_{j=1}^{t-1}(1+r_t)} \leq p_1 w_1 + \sum_{t=2}^{T} \frac{p_t w_t}{\prod_{j=1}^{t-1}(1+r_t)}$$

En particular, para el caso en que $r_t = r$ $\forall t$, y $p_t = p$ $\forall t$,

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^{t-1}} \leq \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^{t-1}}$$

Para interpretar, notemos que en los dos casos anteriores, del lado izquierdo tenemos ahora el valor presente del consumo del individuo ($PV(c)$), que es igual a la suma descontada de las cantidades multiplicadas por sus respectivos precios. Descontada, ya que la tasa de interés (para tasas de interés positivas) hace que los bienes futuros tengan en el presente un menor valor, precisamente porque se encuentran en el futuro. Del lado derecho, tenemos el valor presente del ingreso total del individuo ($PV(w)$), dado por la suma descontada de la dotación del bien homogéneo en cada periódo, multiplicado por el precio de dicho bien en ese período.

Para ejemplificar, tomemos el caso en que el precio del bien homogeneo se mantiene constante a través del tiempo e igual a uno, $p_t = 1 \ \forall i$. Asimismo, imaginemos que el individuo únicamente vive dos períodos, por lo cuál, únicamente contamos con una tasa de interés r. De esta manera, tenemos que la restricción presupuestal intertemporal del individuo está dada por:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} \leq w_1 + \frac{w_2}{1+r}$$

Ahora vamos a despejar c_2 para ver cuánto es lo máximo que puedo consumir en el segundo período:

$$c_2 \leq w_2 + (w_1 - c_1)(1+r)$$

Del lado izquierdo tenemos la cantidad que se consume en el período dos, y tenemos que esta tiene que ser menor o igual a la dotación en ese período (w_2) más o menos lo que haya ahorrado/endeudado en el período uno, multiplicado por los respectivos intereses que recibí/pagué.

Pasemos ahora al caso del individuo. A nuestro agente le genera utilidad el consumo en este período, pero le genera utilidad su consumo en los demás períodos. La forma funcional de la utilidad del consumo en cada período es, en general, indeterminada y dependerá de cada individuo. Pero para los modelos siguientes haremos algunos supuestos adicionales.

Supongamos que el individuo tiene una función de utilidad únicamente por el consumo del bien c en el período t de la forma $u_t(c_t)$. Denominemos a esta función la función de utilidad inmediata, pues es la que se genera precisamente en el período en que se consume ese bien, en contraste, la función $U(c)$ denota la utilidad total del consumo en todos los períodos. Suponemos que la función de utilidad inmediata tiene la misma forma funcional en cada período, es decir, $u_t(c_t) = u(c_t)$ para toda t. No obstante, como los siguientes períodos están más alejados, el consumo en los períodos más alejados le genera menos utilidad, por lo que la suma de las utilidades tiene que ser ponderada con un factor de descuento. De tal suerte, podemos escribir la función de utilidad total como una suma descontada de la función de utilidad inmediata evaluada en cada período.

$$U(\bar{c}) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t)$$

en donde $\beta \in (0,1)$ es la tasa de descuento.

De igual manera, para el caso de dos períodos, podemos suponer que la función de utilidad agregada es igual a:

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

Ya que tenemos la función a maximizar y la restricción, podemos establecer el problema del consumidor. Asumiendo $p_t = 1$ para toda t, y $r_t = r$ para toda t, el problema se ve de la siguiente forma:

$$\max_{c \in \mathbb{R}^T_+} \quad \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t) \qquad \text{s.a.} \qquad \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^{t-1}} \leq \sum_{t=1}^{T} \frac{w_t}{(1+r)^{t-1}}$$

En el caso en el que nos centraremos, supondremos que el individuo vive únicamente dos períodos, por lo que su problema de maximización está dado por la siguiente ecuación:

$$\max_{c \in \mathbb{R}^T_+} \quad u(c_1) + \beta u(c_2) \qquad \text{s.a.} \qquad c_1 + \frac{c_2}{1+r} \leq w_1 + \frac{w_2}{1+r}$$

El problema de maximización nos dará como resultado una demanda del bien homogéneo para cada período t, $t \in \{1, 2\}$, dependiente de los precios, las dotaciones y la tasa de interés:

$$c_t^W(r, w)$$

Para el modelo de consumo intertemporal de dos períodos nos van a interesar en concreto, dos valores de la tasa de interés. El primero es el valor de la tasa de interés tal que, en el óptimo, el individuo decide no ahorrar ni endeudarse, es decir, la tasa de interés que genera que en el óptimo el individuo consuma su dotación.

$$c_1(r, w) = w_1 \qquad c_2(r, w) = w_2$$

Este punto es fácil de encontrar. Supondremos que las dotaciones en ambos períodos son positivas para no complicar el álgebra. Si queremos hallar la tasa de interés tal que la dotación sea el óptimo, dado que la dotación es positiva en ambos períodos, el óptimo será solución interior y podremos aplicar el resultado de Tasa Marginal de Sustitución, en el óptimo interior, es igual a los precios relativos:

$$TMS(w_1, w_2) = (1 + r)$$

Donde, en general,

$$TMS_{s-t}(c) = \frac{\partial U(c)/\partial c_t}{\partial U(c)\partial c_s} = \beta^{t-s}\frac{\partial u(c)/\partial c_t}{\partial u(c)/\partial c_s}$$

Y, en particular para dos bienes:

$$TMS(c_1, c_2) = \beta^{-1}\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}$$

Una vez teniendo esta ecuación, despejamos $1 + r$ para obtener la tasa de interés a la cuál el individuo consume su dotación en el óptimo, es decir:

$$1 + r^A = \frac{u'(w_1)}{\beta u'(w_2)}$$

en donde r^A denota la tasa de interés de autarquía.

La interpretación económica es la misma que la que hemos visto anteriormente con las demandas marshalianas. Cuando la tasa marginal de sustitición es igual a los precios relativos para determinado punto (en este caso, la dotación), la tasa de sustitución del mercado y la del individuo se igualan, por lo que el individuo no tiene incentivos a moverse. De igual manera, la utilidad marginal ponderada que le genera el consumo del bien en determinado período es igual a la desutilidad marginal ponderada que le generaría dejar de consumir en el otro período, y, otra vez, el individuo no tendrá incentivos a moverse de esa canasta. En esta ocasión, encontramos la tasa de interés en la que el individuo no tiene incentivos a desviarse de su dotación.

Entonces, de la misma manera, podemos ver en qué casos el individuo será ahorrador y en qué casos decidirá endeudarse. El requisito para que sea ahorrador, es que su consumo en el primer período sea menor a su dotación en ese período: $w_1 - c_1 > 0$. Para que esto ocurra, la Tasa Marginal de Sustitución en la dotación tiene que ser mayor a los precios relativos:

$$TMS(w_1, w_2) > (1 + r)$$

Esto se debe a que, partiendo de la dotación del individuo en cada período, el mercado está dispuesto a ofrecer más cantidades del bien en el segundo período, del mínimo que el individuo está dispuesto a recibir a cambio de sacrificar una unidad en el presente. Esto genera en el individuo incentivos a sacrificar unidades en el presente para tener más unidades en el futuro, y así aumentar su utilidad.

Simétricamente, para que el individuo se vuelva deudor en lugar de ahorrador $w_1 - c_1 < 0$, la Tasa Marginal de sustitución tiene que ser menor a los precios relativos.

El siguiente punto que nos va a interesar es aquel en el que el individuo mantiene su consumo constante en ambos períodos, es decir:

$$c_1(r, w) = c_2(r, w) = c$$

Para lo anterior, basta nuevamente igualar la TMS a los precios relativos, $1 + r$, y notar que el término en la fracción se cancela:

$$TMS(c_1, c_2) = \frac{u'(c)}{\beta u'(c)} = (1 + r)$$

Notamos que como el consumo es constante, y atentos al caso en que la utilidad agregada es la suma descontada de la utilidad en cadad período, en la ecuación anterior se cancelan los precios y las utilidades marginales, y nos quedamos con

$$\frac{1}{\beta} = 1 + r$$

Recordemos que β es el factor de descuento. Definamos $\beta = \frac{1}{1+\rho}$, en donde $\rho > 0$ es la tasa de descuento del individuo, es decir, la tasa a la que descuenta el consumo futuro, traído a términos de utilidad presente. De tal manera, nuestra ecuación anterior nos queda como:

$$1 + r = 1 + \rho$$

Esto nos dice que, cuando la tasa de interés es igual a la tasa de descuento del individuo, sin importar la composición de la dotación del individuo, el individuo consumirá la misma cantidad del bien homogéneo en cada período. A esto se le denomina suavización perfecta del consumo.

4.2.2 Ocio-consumo

En este modelo, tendremos un individuo que tendrá utilidad por ocio o descanso (h), y consumo (c) de la forma $u(h, c)$. Asimismo, tendrá una dotación de tiempo T que podrá repartir entre ocio y trabajo $T = h + l$, en donde l es la cantidad que el agente dedica a trabajar, y por la cual recibe un salario por hora w. Supongamos que el agente cuenta con algún ingreso no laboral al que denotaremos $y \geq 0$.

Entonces tenemos dos restricciones. La primera, una restricción presupuestal que nos dice cuánto es lo máximo que puede gastar el individuo en cada uno de los bienes. Y una segunda, que nos dice que aunque el individuo quiera, no puede descansar más de T unidades de tiempo. Es decir, si bien puede intercambiar horas de ocio para trabajar y poder consumir más, no puede intercambiar ingreso no laboral con tal de que su día tenga 25 horas. Las restricciones son:

$$\begin{aligned} pc + wh &\leq y + wT \\ h &\leq T \end{aligned}$$

La primera restricción denota, del lado izquierdo, el valor total del consumo, mientras que el lado derecho denota el valor total de la dotación. Una forma de verlo de manera más clara es despejando para pc:

$$pc \leq w(T - h) + y$$

En la desigualdad anterior queda más claro del lado izquierdo el valor del gasto, el cual no puede ser mayor al ingreso laboral del agentem, $w(T - h)$, más su ingreso no laboral y.

Así, el problema del consumidor está denotado por:

$$\max_{(h,c)\in\mathbb{R}^2_+} \quad u(h,c) \qquad \text{s.a.} \begin{cases} pc + wh \leq y + wT \\ h \leq T \end{cases}$$

Encontramos la solución anterior utilizando el método de Kuhn-Tucker, recordando que tenemos una restricción adicional a la presupuestal, ésta es, la restricción temporal. La solución al problema nos da la demanda de consumo y la demanda de ocio del individuo:

$$\text{h(w,p,T,y)} \qquad\qquad \text{c(w,p,T,y)}$$

El tiempo que el individuo no dedica al ocio lo dedica a trabajar: $l = T - h$. Por lo tanto, usando la demanda de ocio, podemos obtener la oferta de trabajo del agente:

$$l(w,p,T,y) = T - h(w,p,T,y)$$

Es posible que el individuo decida no trabajar, por ejemplo, porque ya tenga suficiente dinero ahorrado. Si el individuo decide no trabajar, estará consumiendo T unidades de ocio, y su consumo será unicamente su ingreso no laboral y/p. Entonces, hay un nivel de precios relativos (o de salario relativo al precio) a partir del cuál, ante salarios más bajos, el individuo ya no estará dispuesto a trabajar. Utilizando nuestra condición de TMS igual a precios relativos:

$$TMS\left(T, \frac{y}{p}\right) \geq \frac{w}{p}$$

Despejando para w, y con igualdad, denominamos a

$$w^r = p \times TMS\left(T, \frac{y}{p}\right)$$

el precio de reserva del agente. Esto es, el precio mínimo al que está dispuesto entrar al mercado laboral.

Para este modelo, la Tasa marginal de sustitución me dice cuántas unidades de consumo estoy dispuesto a sacrificar por una unidad de ocio. Los precios relativos me dice cuántas unidades de consumo está dispuesto a entregar el mercado, a cambio de una unidad de tiempo. Cuando la Tasa Marginal de Sustitución evaluada en la dotación es mayor o igual a los precios relativos, el modelo me está diciendo que el individuo está dispuesto a sacrificar al menos tantas unidades de ocio por una unidad de descanso como las unidades de consumo que el mercado está dispuesto a soltar a cambio de que le entregues una unidad de trabajo. No obstante, las restricciones temporales nos dicen que el día tiene 24 horas, y ni una más, por la que el individuo no podrá obtener ocio a cambio de consumo intercambiando con el Mercado, pese a que ambos están dispuestos a realizar dicha transacción.

Finalmente, recordemos que el individuo nunca va a ser comprador neto de ocio. No puede comprar más horas de las que tiene disponibles al día para trabajar. Entonces cabe preguntarse qué ocurre cuando el salario aumenta. Aquí hay dos efectos: por un lado, el agente es más rico, puesto que su ingreso laboral aumenta; esto haría que aumente la demanda de ocio y, consecuentemente, disminuya la oferta de trabajo. Por otro lado, si w aumenta, el precio del ocio aumenta igualmente, por lo que el agente dejará de consumir ocio y trabajará más; podemos ver esto también como que el costo de oportunidad de no trabajar aumenta, puesto que el salario es más atractivo. No es posible decir sin ambigüedad cuál de los dos efectos es más fuerte, y es un tema recurrente en economía laboral (si los agentes trabajarán menos cuando el salario aumenta).

4.3 Preferencias reveladas y variación compensatoria a la Slutsky

El problema que se planteó Slutsky originalmente no era el de maximización de utilidad sujeto a una dotación, sino el de fijar un nivel de consumo, y tratar de inferir más sobre las preferencias del consumidor. En particular, Slutsky

asume una función de demanda $x(p, w)$ (no correspondencia), que satisface la Ley de Walrás y homogeneidad grado cero en precios. Por último, Slutsky asume que la función de demanda satisface el axioma débil de preferencias reveladas. De aquí ya sabemos, entonces, que se trata de un resultado fundamentado en la teoría de preferencias reveladas y no en la maximización de utilidad. A partir de esto, Slutsky busca separar dos efectos ante un cambio en precios:

1. Un **efecto sustitución**. Esto es, un cambio en los precios relativos debería cambiar la composición óptima de la canasta de los agentes.
2. Un **efecto ingreso**. Esto es, el cambio en precios hace que los agentes sean relativamente más pobres o ricos, por lo que nuevamente cambiará la composición de la demanda.

Slutsky aisla estos efectos de la siguiente manera. Supongamos un nivel inicial de precios e ingreso, (p, w), y una cantidad demandada a dicho nivel de precios. Por la Ley de Walrás:

$$p \cdot x(p, w) = w$$

Ahora, supongamos que hay un cambio en precios de p a p', pero w se mantiene constante. Este cambio en precios no necesariamente es en el precio de un sólo bien, sino que puede ser para más de un bien. Esto se ejemplifica en la figura 4.5 a la izquierda. Para ser más fácil en análisis gráficas, asumiremos que este cambio en precios fue un incremento en el precio de los dos bienes, pero no necesariamente proporcional.

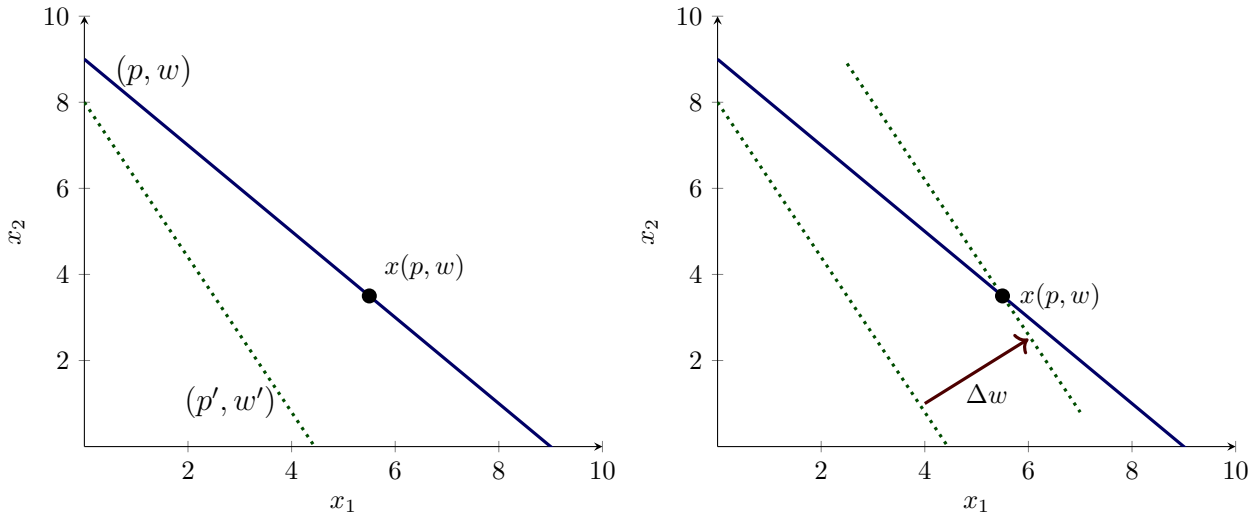


Figure 4.5: Variación compensatoria a la Slutsky

Tras este cambio en precios, ahora supongamos un nuevo nivel de ingreso w', tal que la canasta que originalmente era óptima, $x(p, w)$, sea costeable:

$$w' = p' \cdot x(p, w)$$

Denotemos Δw el cambio en el ingreso, al cual denominamos **variación compensatoria** en el ingreso a la Slutsky. Esto se representa al lado derecho de la figura 4.5. La nueva línea punteada tiene la misma pendiente que la anterior (los precios relativos son lo mismo) pero está hacia afuera (el ingreso aumentó por la compensación a la Slutsky). Esta línea pasa por la canasta original.

Una forma de pensar este cambio en precios es el siguiente. Supongamos un trabajador "promedio" que tiene un sueldo fijo w. En esta economía, los precios al día de hoy están dados por p, y el trabajador consume la canasta $x(p, w)$. Ahora, al año siguiente hay inflación, y los precios cambian de p a p'. El trabajador va entonces con su empleador y le comenta que, tras la inflación, ya no puede consumir la canasta $x(p, w)$, así que le pide un incremento de sueldo. El empleador, siendo benevolente, le incrementa el sueldo de w a w'

para que el trabajador pueda seguir consumiendo esa canasta.

$$w' = p' \cdot x(p, w) = \sum_{l=1}^{L} p'_l x_l(p, w)$$

Lo anterior no quiere decir que el trabajador vaya a consumir exactamente la misma canasta, pero sí que al menos podría hacerlo si así decidiera.

Definición. Denominamos la **ley de la demanda compensada** si, para todo cambio en precios compensado a la Slutsky de (p, w) a (p', w'), en donde $w' = p' \cdot x(p, w)$, se tiene que:

$$(p' - p) \cdot (x(p', w') - x(p, w)) \leq 0$$

La notación anterior es matricial, pero podemos desagregarla como:

$$\sum_{l=1}^{L} (p'_l - p_l)(x_l(p', w') - x_l(p, w)) \leq 0$$

Sustituyendo $p'_l - p_l = \Delta p$ y $x_l(p', w') - x_l(p, w) = \Delta x_l$, tenemos

$$\sum_{l=1}^{L} \Delta p_l \times \Delta x_l \leq 0$$

La expresión anterior quiere decir que las demandas compensadas (puesto que supusimos que, ante un cambio en los precios, compensamos con un cambio en el ingreso) se mueven en dirección opuesta a los precios. Esto es en el agregado, pero es cierto, en particular, para el caso en que sólo un bien cambia en precio. Supongamos que $p_1 \neq p'_1$, y $p_l = p'_l$ para $l \geq 2$. Entonces la expresión anterior se reduce a:

$$\Delta p_1 \times \Delta x_1 \leq 0$$

Esto quiere decir que si el precio aumenta, la cantidad demandada disminuye.

Teorema: Supongamos que las funciones de demanda $x(p, w)$ satisfacen la ley de Walrás y son homogéneas de grado cero. Entonces $x(p, w)$ satisface el axioma débil de preferencias reveladas si y sólo si satisface la ley de la demanda compensada

Demostración: Como es un enunciado del tipo si y sólo si, tenemos que demostrar que el axioma débil $\implies$ ley de la demanda compensada, y que la ley de la demanda compensada $\implies$ axioma débil. **Axioma débil $\implies$ ley de la demanda compensada**:

Por definición, $p' \cdot x(p, w) = w'$. Ahora, si $x(p', w') \neq x(p, w)$, el axioma débil implica que $p \cdot x(p', w') < w'$, lo cual es una contradicción, y si $x(p', w') = x(p, w)$, entonces $p \cdot x(p', w') = w$ por la ley de Walrás. Entonces $p \cdot x(p', w') \geq w$.

Otra vez, por la Ley de Walras, $w = p \cdot x(p, w)$, por lo que $p \cdot x(p', w') \geq p \cdot x(p, w)$. Despejando:

$$p \cdot (x(p', w') - x(p, w)) \geq 0 \tag{4.1}$$

Ahora, nuevamente por definición de compensación a la Slutsky, $p' \cdot x(p, w) = w'$, y por la ley de Walrás, $w' = p' \cdot x(p', w')$. Entonces $p' \cdot x(p, w) = p' \cdot x(p', w')$, por lo que $p' \cdot (x(p', w') - x(p, w)) = 0$. Incluyendo en la

ecuación 4.1:

$$\underbrace{p' \cdot (x(p', w') - x(p, w))}_{=0} - \underbrace{p \cdot (x(p', w') - x(p, w))}_{\geq 0} \leq 0$$

y factorizando:

$$(p' - p) \cdot (x(p', w') - x(p, w)) \leq 0$$

La demostración en sentido inverso, es decir, que la ley de la demanda compensada implica el axioma débil, es más complicada, y la omitiré por el momento. ■.

Recordemos que en mátemáticas, una implicación en ambos sentidos quiere decir que dos enunciados son equivalentes. El que el axioma débil sea equivalente a la ley de la demanda compensada es un resultado no trivial.

Regresando a nuestro ejemplo gráfico, notemos que si bien ambos precios disminuyeron, el precio del bien 1 disminuyó más que el precio del bien 2. Por lo tanto, la ley de la demanda compensada implica que la cantidad demandada del bien 1 disminuye mientras que la del bien 2 aumenta.

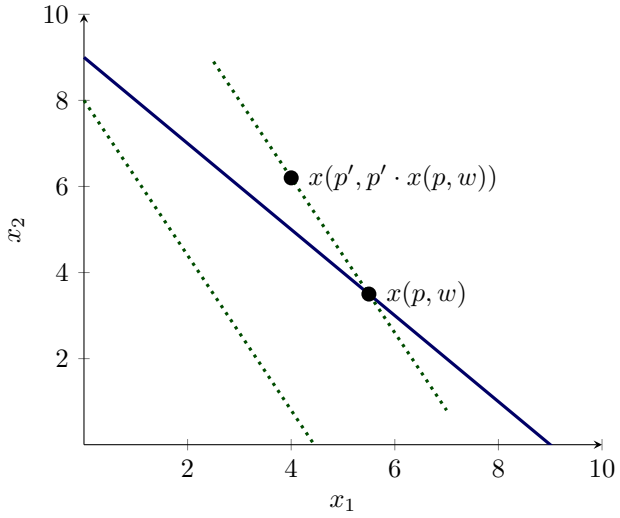


Figure 4.6: Variación compensatoria a la Slutsky

Ahora bien, en la sección 3 vimos que del problema de maximización de utilidad, no es posible deducir la Ley de la Demanda (pendiente negativa). ¿Por qué aquí sí? Antes hay que señalar que esta sección está basada en preferencias reveladas, y no en maximización de utilidad, pero esta no es la razón. La razón es que aquí no estamos hablando de la función de demanda, sino de una demanda que siempre está siendo compensada ante cambios en los precios, mediante un cambio en el ingreso. De manera formal, la Ley de la demanda compensada aplica para

$$x\left(p', p' \cdot x(p, w)\right),$$

y no para

$$x(p, w)$$

.

4.3.1 Matriz de sustitución de Slutsky

Para terminar, veremos una última implicación del axioma débil de preferencias reveladas. Asumamos lo mismo que en la sección anterior, y además que $x(p, w)$ es una función de la clase C^1. Fijemos un nivel de precios (p, w), y supongamos un cambio en precios dado por dp, y una variación compensatoria en el ingreso igual a $dw = x(p, w) \cdot dp$.

Esto es lo mismo que en la sección anterior, únicamente utilizando cambios marginales en lugar de cambios grandes. Con esta notación, la ley de la demanda compensada implica:

$$dp \cdot dx \leq 0$$

Recordemos que para una sola función, la diferenciación total está dada por:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_2} dp_2 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial p_L} dp_L + \frac{\partial x_1}{\partial w} dw$$

Y $dx = (dx_1 \; dx_2 \; \cdots \; dx_L)^T$. Podemos escribir dx usando el Jacobiano para la diferenciación total:

$$\begin{aligned} dx =& D_p x(p,w) dp + D_w x(p,w) dw \\ =& D_p x(p,w) dp + D_w x(p,w) x(p,w) dp \\ =& \left(D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^T \right) dp \end{aligned}$$

Lo anterior está en notación matricial, y D_p denota el vector Jacobiano para la función vector $x(p,w)$ respecto al vector p, y D_w denota el vector Jacobiano para la función vector $x(p,w)$ respecto al salario w. Sustituimos en el resultado anterior, y obtenemos:

$$dp \cdot dx = dp \cdot \underbrace{\left(D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^T \right)}_{\text{Matriz de sustitución de Slutsky}} dp \leq 0 \tag{4.2}$$

Denotemos a la matriz de sustitución de Slutsky $S(p,w) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^T$. Una vez más, está en términos de los Jacobianos, pero podemos obtener el elemento lk de la matriz:

$$\underbrace{s_{lk}(p,w)}_{\text{Efecto sustitución}} = \underbrace{\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}}_{\text{Efecto total}} + \underbrace{\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)}_{\text{Efecto ingreso}}$$

Cada elemento en la matriz de Slutsky me dice cuánto cambia la demanda total del bien l ante cambios en el prcio del bien k (efecto precio total), más el cambio en la demanda del bien l cuando realizamos una compensación ante el ingreso (efecto ingreso). Lo restante, entonces, debe ser el efecto sustitución. Regresemos a la expresión en la ecuación (4.2): $dp \cdot S(p,w) dp \leq 0$. Esta expresión la podemos reescribir como $dp^T S(p,w) dp \leq 0$, y notemos que esto se parece a la definición de una matriz negativa semidefinida.[5] Entonces, la matriz de Slutsky es negativa semidefinda. Como corolario a esto, una implicación de las matrices negativas semidefinidas es que todos los elementos en la diagonal son negativos o cero:

$$s_{ll}(p,w) \leq 0 \qquad \forall \; l = 1, \ldots, L$$

Este resultado ya lo habíamos anticipado en el teorema anterior, respecto a que una función satisface WARP si y sólo si satisface la ley de la demanda compensada. La ecuación anterior no es más que una representación de la ley de la demanda compensada: la función de demanda compensada tiene pendiente negativa.

Para finalizar esta sección, notemos que si bien $s_l l(p,w) \leq 0$, el efecto sustitución directo es negativo, esto no implica que el efecto total vaya a ser negativo. Incluso la teoría de las preferencias reveladas predice que el efecto total puede ser positivo. No obstante, tiene sus condiciones:

[5] Una matriz A es negativa semidefinida si para toda $x \gg 0$, $x^T A x \leq 0$.

$$\underbrace{s_{ll}(p,w)}_{\leq 0} = \underbrace{\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l}}_{>0} + \underbrace{\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_l(p,w)}_{<0}$$

Esto es, si la función de demanda total tiene pendiente positiva (es un bien Giffen), entonces tiene que ser un bien inferior (el efecto ingreso es negativo).

Una pregunta intersante es si la matriz de Slutsky es simétrica. Esto es, si $s_{lk}(p,w) = s_{kl}(p,w)$. La respuesta es que no necesariamente. En realidad, no hay ninguna propiedad del axioma débil de preferencias reveladas que nos permita inferir que la matriz de Slutsky sea simétrica.

5 Minimización de gasto

En la sección 3 pensamos en el problema de los consumidores como uno de maximización de utilidad: a cada nivel de precios e ingreso, cuál es la canasta que más me conviene:

$$\max_{x \in X} \quad u(x) \quad \text{s.t. } p \cdot x \leq w$$

En este caso, la restricción presupuestal está fija, y lo que varía entre las distintas canastas es la utilidad que me proporcionan. Podemos pensar en el caso contrario: fijar un nivel de utilidad, y variar el gasto que tengo que hacer para alcanzarl dicho nivel. Este problema se conoce como el problema de minimización de gasto. Esta sección se centra alrededor del problema de minimización de gasto. Obtendremos las demandas que se derivan de dicho problema y las relacionaremos a las demandas marshalianas mediante un teorema de dualidad. Esta relación nos permitirá, finalmente, obtener un efecto sustitución y un efecto ingreso similar al que estudia Slutsky, y que introdujimos brevemente al final de la sección 4. A diferencia de Slutsky, sin embargo, esta relación estará fundada en teoría de maximización de utilidad, y no en la teoría de las preferencias reveladas.

Consideremos nuevamente un agente con preferencias $\succeq$ sobre un conjunto de bienes X, y representables por una función de utilidad $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)$. En el problema de maximización de utilidad, este agente busca la canasta que le proporciona el mayor nivel de utilidad posible, sujeto a una restricción presupuestal. En el problema de minimización de gasto, asumimos por un momento no maximiza utilidad, sino que primero decide el nivel mínimo de utilidad que quiere tener, y de entre todas las canastas que le proporcionan ese nivel de utilidad, elige la que le cuesta menos.

Este ejercicio es poco intuitivo la primera vez que se utiliza. Cierto, es más fácil pensar en las personas como eligiendo la canasta que más prefieren entre todas aquellas que pueden costear. Es raro pensar que un individuo decide primero qué tan feliz quiere ser, y luego limitarse a ese nivel de felicidad al menor costo. A continuación van dos ejemplos donde la minimización de gasto podría ser relevante.

Ejemplo 1: Imaginemos que una madre tiene cierto presupuesto w, y busca darle cierta calidad de vida a su hijo. El hijo tiene preferencias representables por una función de utilidad $u(x)$. La madre decide que quiere darle a su hijo una utilidad de cuando menos u_0. Es decir, la madre le comprará a su hijo una canasta x tal que $u(x) \geq u_0$. La madre, sin embargo, tiene que mantener un presupuesto para otros gastos, así que busca darle a su hijo dicha utilidad al menor costo posible:

Ejemplo 2: Siguiendo un poco con el ejemplo de la variación compensatoria a la Slutsky en la sección 4.3, imaginemos que frente a cierto nivel de precios p e ingreso w, un trabajador consume la canasta $x(p, w)$, y obtiene un nivel de utilidad $V(p, w) = u(x(p, w)) \equiv u_0$. Al año siguiente, la inflación hace que los precios generales aumenten de p a p'. por lo que el trabajador quiere negociar nuevamente su sueldo w.
El trabajador, entonces, pide suficiente dinero como para poder seguir consumiendo la canasta original; esto es, solicita un salario w' tal que:

$$w' = p' \cdot x(p, w) = \sum_{l=1}^{L} p'_l x_l(p, w)$$

- Por ejemplo, si cuando los precios son $p_1 = 5$ y $p_2 = 2$ el trabajador agota su ingreso en consumir 4 unidades del bien 1 y 2 unidades del bien 2, entonces cuando los precios aumentan a $p'_1 = 6$ y $p'_2 = 8$, el trabajador solicitará un salario de $w' = 6 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 40$.

El empleador, habiendo estudiado un curso de microeconomía intermedia, sabe que al trabajador no le añade un valor intrinseco a la canasta $x(p, w)$, sino que su valor de esa canasta está en que le permite al trabajador obtener un nivel de utilidad $V(p, w) = u(x(p, w)) \equiv u_0$. Por lo tanto, el empleador decide dar al trabajador el mínimo sueldo que le permita obtener ese nivel de utilidad.

- En el mismo caso, el empleador desubre que el trabajador está indiferente entre consumir 4 unidades del bien 1 y 2 unidades del bien 2, y consumir 5 unidades del bien 1 y 1 unidad del bien 2: $u(4, 2) = u(5, 1) = u_0$. Así, le basta al empleador darle un salario de $w' = 6 \cdot 5 + 8 \cdot 1 = 38$ en vez de $w' = 40$.

Los ejemplos anteriores son meros ejercicios mentales, y podrían considerarse forzados. En ambos se plantea la minimización del gasto sujeto a un nivel de utilidad mínimo en situaciones que no son realistas. Sin embargo, permite ilustrar el problema de minimización de gasto. Es más, permite apuntar a por qué es importante dicho problema: para análisis del bienestar. Particularmente, en el ejemplo del empleador, se ilustra que en la teoría de maximización de utilidad, la medida del bienestar es el nivel de utilidad, y no el nivel de consumo. Y para obtener estas medidas de bienestar, el problema de minimización de gasto es un paso intermedio.

5.1 El problema de minimización de gasto y la demanda hicksiana

En esta sección, haremos uso de muchas de las propiedades que vimos en la sección 3, por lo que en caso de duda, se recomienda regresar a dicha sección. Partamos nuevamente de preferencias representables por una función de utilidad $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ que es continua, monótona y cuasicóncava. Nuevamente, asumimos que el agente sólo puede elegir cantidades no negativas de los bienes, $x \geq 0$, y que el agente quiere mantener un nivel de utilidad de u.

$$\min_x \quad p \cdot x \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} u(x) \geq u \\ x_l \geq 0 \quad \forall l = 1, \ldots, L \end{cases}$$

En general $u \geq u(0)$; de lo contrario, el problema podría no tener solución. A este programa lo denominamos el problema de minimización de gasto, y lo denotaremos GMIN. Lo podemos reescribir como:

$$\min_x \quad \sum_{l=1}^{L} p_l x_l \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} u(x) \geq u \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \vdots \\ x_L \geq 0 \end{cases}$$

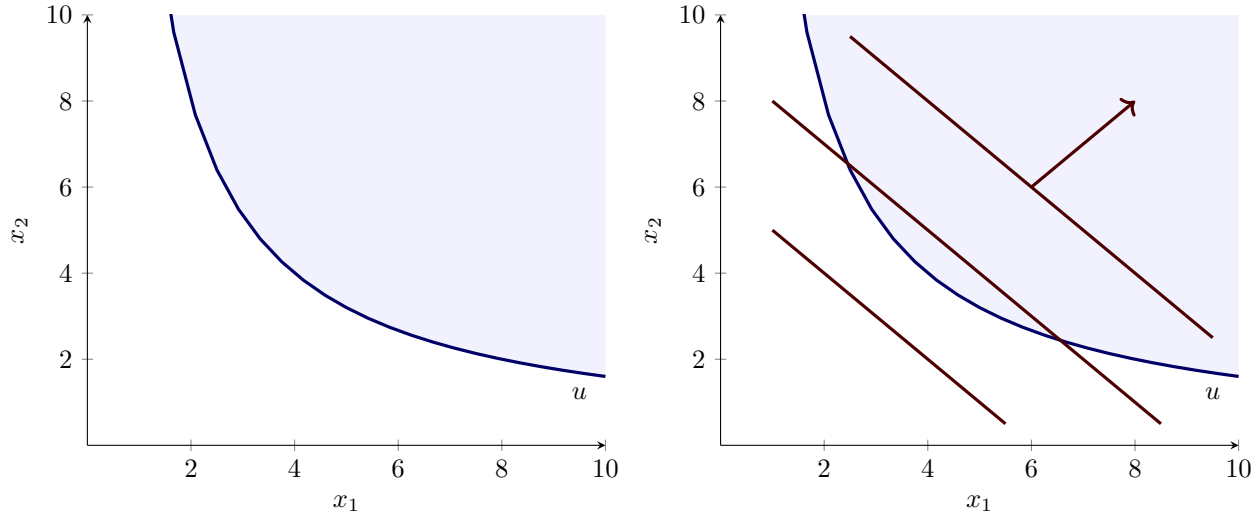


Figure 5.1: Minimización del gasto

Veamos la figura 5.1. En la gráfica de la izquierda, dibujamos la curva de indiferencia para un nivel de utilidad u que deseamos que el individuo tenga. La región sombreada representa el conjunto de canastas que le proporcionan al individuo un nivel de utilidad de u o superior, por lo que son aquellas canastas que satisfacen la restricción $u(x) \geq u$. Cada una de dichas canastas tiene un costo para el consumidor, igual a $p \cdot x$. Conceptualmente, la minimización del gasto consiste en encontrar, de entre todas esas canastas en la zona sombreada o sobre la frontera, que minimiza el nivel de gasto.

Podemos pensar en la función de gasto como una función de $\mathbb{X}_+^L \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p \cdot x$. Al igual que las funciones de utilidad, podemos fijar el nivel de gasto e (*expenditure*), y despejar para el bien dos:

$$e = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{e}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Esta es una recta con pendiente $-\frac{p_1}{p_2}$, igual a los precios relativos, y podemos hacer esto para distintos niveles de gasto e. Representamos estas lineas a la derecha de la gráfica 5.1. Nos referimos a cada una de estas rectas como *rectas de isogasto*, pues cada una de las canastas sobre las mismas tiene el mismo costo para el consumidor. La flecha roja indica que el gasto crece en dirección opuesta al origen.

Regresemos al problema de minimziación de gasto. Para evitar confusiones con el signo de las condiciones de primer orden y de los multiplicadores, traduciremos este problema a su forma canónica. Así, en vez de minimizar el gasto, maximizaremos el negativo del gasto:

$$\max_x \quad -\sum_{l=1}^{L} p_l x_l \quad \text{s.t.} \begin{cases} u - u(x) \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ \vdots \\ -x_L \leq 0 \end{cases}$$

Para el caso de dos bienes, esto se traduce en:

$$\max_x \quad -p_1 x_1 - p_2 x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} u - u(x) \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Este problema lo podemos resolver utilizando el método de Kuhn-Tucker. En particular, las condiciones de primer orden indican que existe $\lambda \geq 0$ y un vector de $\mu \geq 0$ tal que en la canasta óptima x^*,

$$-p_l + \lambda \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} + \mu_l = 0 \quad \forall l = 1, \ldots, L \tag{5.1}$$
$$u - u(x^*) \leq 0 \tag{5.2}$$
$$-x_l^* \leq 0 \quad \forall l = 1, \ldots, L \tag{5.3}$$
$$\lambda \left(u_0 - u(x^*)\right) = 0 \tag{5.4}$$
$$\mu_l x_l^* = 0 \quad \forall l = 1, \ldots, L \tag{5.5}$$
$$\lambda, \mu_l \geq 0 \quad \forall l = 1, \ldots, L \tag{5.6}$$

Pasando a la gráfica a la izquierda en la figura 5.2. Algo que inmediatamente salta a la vista es que, como el gasto es estrictamente creciente en las cantidades de x, estar en una canasta en la zona sombreada pero no sobre la curva de indiferencia no minimiza el gasto. Esto es, por la propiedad de monotonía de la función de utilidad y del gasto, si x es una canasta que minimiza el gasto, entonces $u(x) = u$. Así, todas las canastas en la zona sombreada representan un menor gasto, pero manteniendo la restricción de utilidad.

Esto nos permite simplificar el las condiciones de primer orden, particularmente, la segunda condición $u - u(x^*) \leq 0$ se vuelve $u - u(x^*) = 0$, esto es, se cumple con igualdad. Esta condición tiene es análoga a la Ley de Walrás en el problema de maximización de utilidad.

La gráfica a la derecha en la figura 5.2, muestra que no basta con que una canasta x satisfaga $u(x) = u$ para minimizar el gasto. En esta gráfica, todas las canastas en la media luna sombreada representan canastas que dan un menor gasto, pero aún satisfacen $u(x) \geq u$. Regresemos a las condiciones de primer orden, en particular, a la quinta

restricción que señala que $\mu_l x_l^* = 0$. Para el caso de dos bienes, si tanto $x_1^* > 0$ y $x_2^* > 0$, entonces $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Sustituyendo en la primera condición de primer orden y dividiendo el caso del bien 1 entre el caso del bien 2:

$$\left.\begin{aligned} -p_1 + \lambda u_1(x^*) &= 0 \\ -p_2 + \lambda u_2(x^*) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad TMS(x^*) = \frac{p_1}{p_2}$$

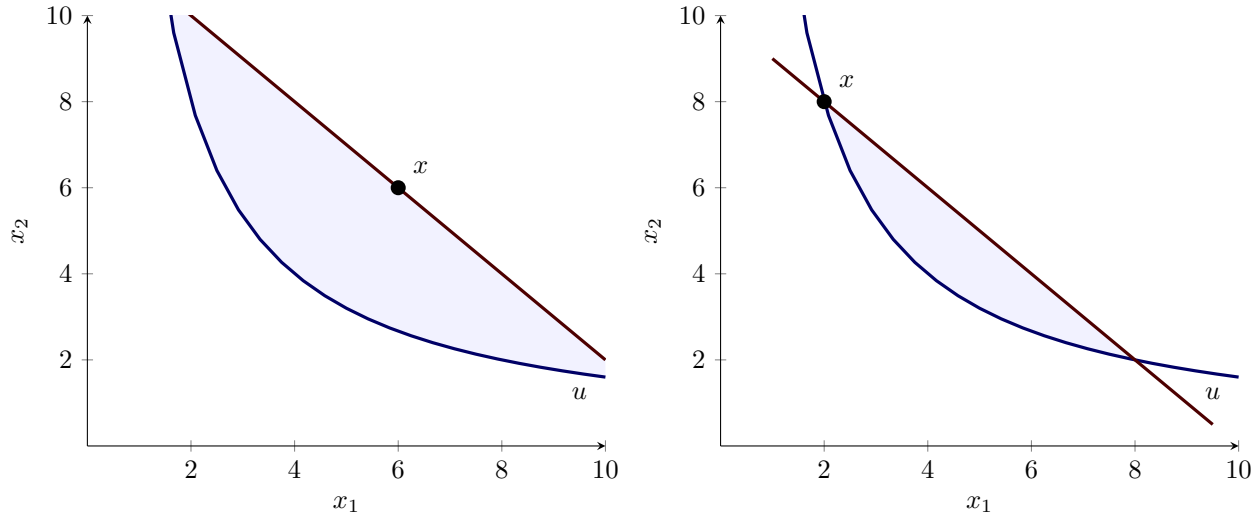


Figure 5.2: Canastas no óptimas

Este caso de solución interior se ilustra a la izquierda de la figura 5.3

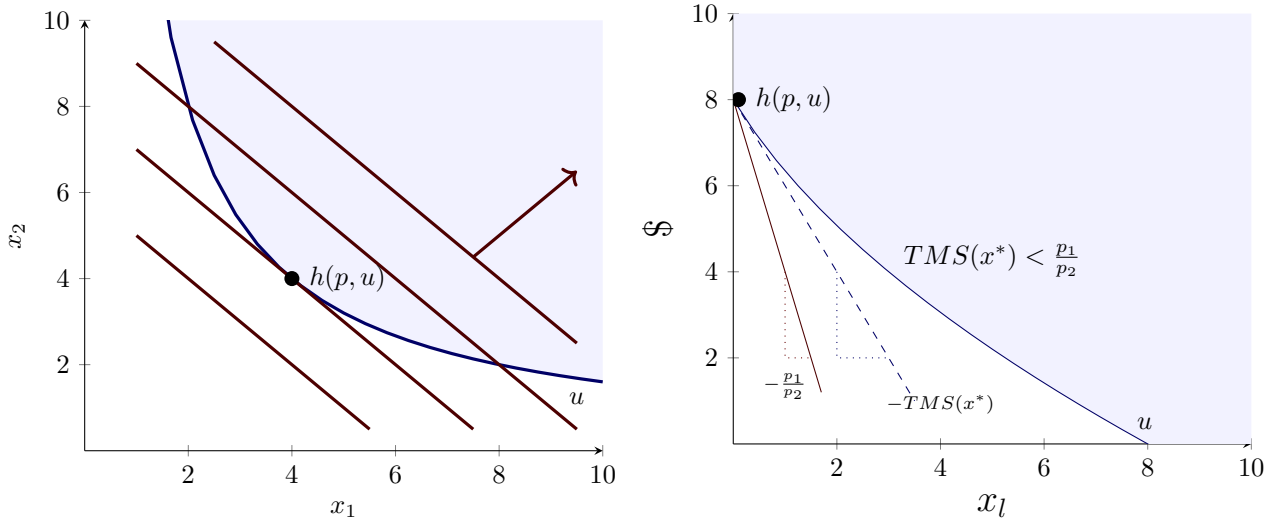


Figure 5.3: Minimización del gasto

Por otra parte, en el caso de solución esquina, asumamos que $x_1^* = 0$, por lo que $x_2^* > 0$; entonces $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 = 0$. Sustituyendo en la primera condición de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} -p_1 + \lambda u_1(x^*) + \mu_1 &= 0 \\ -p_2 + \lambda u_2(x^*) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad TMS(x^*) + \frac{\mu_1}{\lambda u_2(x^*)} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad TMS(x^*) < \frac{p_1}{p_2}$$

Este caso se representa al lado derecho en la figura 5.3. Algo que notarán algunos lectores es que, del resultado gráfico y de las condiciones de tangencia que nos dan las condiciones de primer orden, la solución para ambos casos,

interior y esquina, guarda cierta similitud con la solución para un problema de maximización de utilidad. Esto no es coincidencia, y regresaremos a esto más adelante.

Correspondencia de Demandas Hicksianas
Las soluciones a este sistema de ecuaciones la denominamos la correspondencia de demandas hicksianas, y las denotamos

$$h(p,u) \in \arg\min_x \{p \cdot x : u(x) \geq u\} = \begin{pmatrix} h_1(p,u) \\ h_2(p,u) \\ \vdots \\ h_L(p,u) \end{pmatrix}$$

En la sección 4.3 habíamos visto un caso en que, frente a cambios en los precios p, al individuo se le compensaba en ingreso w para poder comprar la misma canasta. Similarmente, podemos interpretar la demanda hicksiana como, ante un cambio en precios, al individuo se le compensa en ingreso w, no para alcanzar a comprar la misma canasta, sino para alcanzar el mismo nivel de utilidad. En este sentido, a las demandas hicksianas también se les conoce como **demandas compensadas**.

5.1.1 Un ejemplo sencillo

Consideremos que un agente tiene preferencias únicamente por el bien x_1 y x_2, y su función de utilidad es $u(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ para $\alpha \in (0,1)$. El problema de minimización de gasto está dado por:

$$\max_x \quad -p_1x_1 - p_2x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} u - x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Sabemos que, por el no exceso de utilidad, la restricción de utilidad se cumple con igualdad. Asimismo, podemos aplicar las condiciones de Inada, sabemos que en el óptimo, $x_1^* > 0$ y $x_2^* > 0$. Así, las condiciones de primer orden se reducen a:

$$\begin{aligned} -p_1 + \lambda\alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha} &= 0 \\ -p_2 + \lambda(1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha} &= 0 \\ u - x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando los precios de las primeras dos ecuaciones, y dividiéndolas:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}x_1$$

Sustituyendo en la restricción de utilidad

$$u = x_1^\alpha\left(\frac{p_1}{p_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}x_1\right)^{1-\alpha} = x_1\left(\frac{p_1}{p_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

Y despejando para x_1 obtenemos nuestra demanda hicksiana $h_1(p_1,p_2,u)$:

$$h_1(p_1,p_2,u) = u\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha}$$

Podemos sustituir en la función que teníamos para x_2, o ver que por simetría se tiene que cumplir:

$$h_2(p_1, p_2, u) = u \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{p_1}{p_2} \right)^{\alpha}$$

5.1.2 Representación gráfica

La representación gráfica no es muy distinta de la presentada en la sección de maximización de utilidad. Ahora dejamos fijo el nivel de utilidad u, y la respectiva curva de indiferencia. Para distintos niveles de precios relativos p_1/p_2 podemos encontrar la canasta que minimiza el gasto como aquella donde la curva de indiferencia es tangente a los precios relativos. En la figura 5.4 a la izquierda fijamos el precio del bien 2 en $p_2 = 1$, y cambiamos el precio del bien 1 en $p_1 \in \{1, 2, 4\}$. Estos precios relativos son la pendiente de las líneas rojas punteadas. En la gráfica de abajo, para cada uno de estos precios, representamos la cantidad de x_1. Esta es la demanda hicksiana para el bien 1.

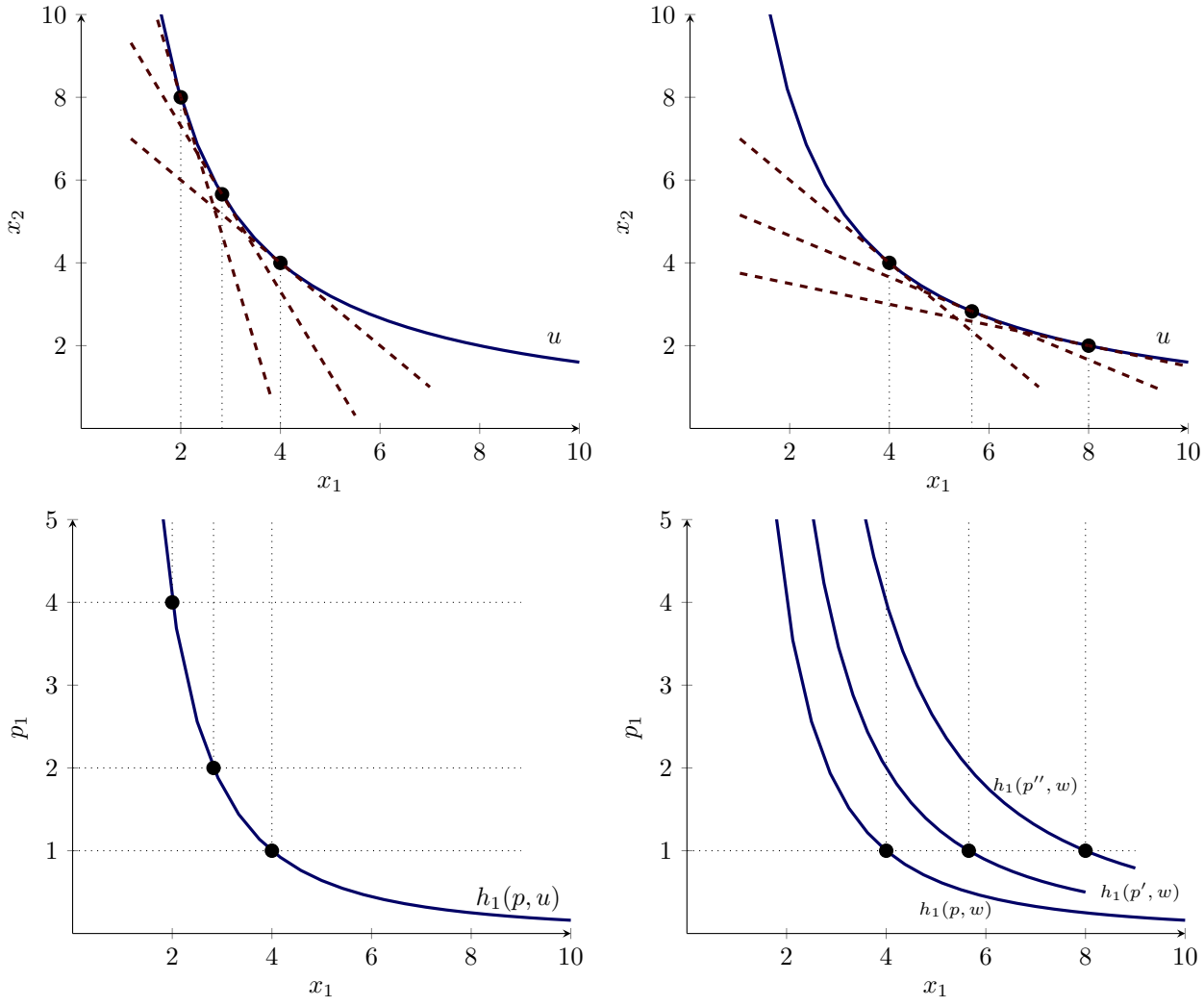


Figure 5.4: Función de Demanda Hicksiana

Del lado derecho mostramos cambios en los precios del bien 2, para $p_2 \in \{1, 2, 4\}$, que respectivamente denotaremos como $\{p, p', p''\}$, y dejamos fijo el precio del bien 1 en $p_1 = 1$. La gráfica de arriba muestra el análisis en el mapa de curvas de indiferencia, mientras que abajo, dejando fijo el precio de 1, desplazamos la función de demanda ante cambios en el precio del bien 2.

5.2 Propiedades de la correspondencia de demanda Hicksiana

Al igual que para la maximización de utilidad, el problema puede tener múltiples soluciones, en cuyo caso tenemos una correspondencia de demanda, o un único óptimo, en cuyo caso tenemos una función de demanda.

Si la función de utilidad u es continua y diferenciable, y representa preferencias localmente no saciables, entonces la correspondencia de demanda es:

- Continua en los precios y en la utilidad (p, u).
- Homogénea de grado cero en precios: $h(\alpha p, u) = h(p, u)$ para toda $\alpha > 0$.
- No exceso de utilidad, esto es, para toda $x \in h(p, u)$, $u(x) = u$.
- Si además u es cuasicóncava, $h(p, w)$ es convexa. Si u es **estrictamente cuasicóncava**, $h(p, w)$ es una solución única.
- Diferenciable, bajo ciertas condiciones.

La demostración de estas propiedades va a ser muy similar al caso de la maximización de utilidad, por lo que nos saltaremos varios pasos.

Continuidad: La continuidad de la correspondencia de demanda se sigue del máximo de Berge. Concretamente, en caso de múltiples soluciones, la correspondencia de demanda hicksiana es hemicontinua superior, y en caso de solución única, esto se traduce en continuidad.

Homogeneidad de grado cero en precios: Para cualquier $\alpha > 0$, multiplicar los precios por α es una transformación monótona en la función objetivo, por lo que no altera el argumento:

$$\arg\max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x : u(x) \geq u\} = \arg\max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{\alpha p \cdot x : u(x) \geq u\}$$

Esto es una propiedad de todos los problemas de maximización.

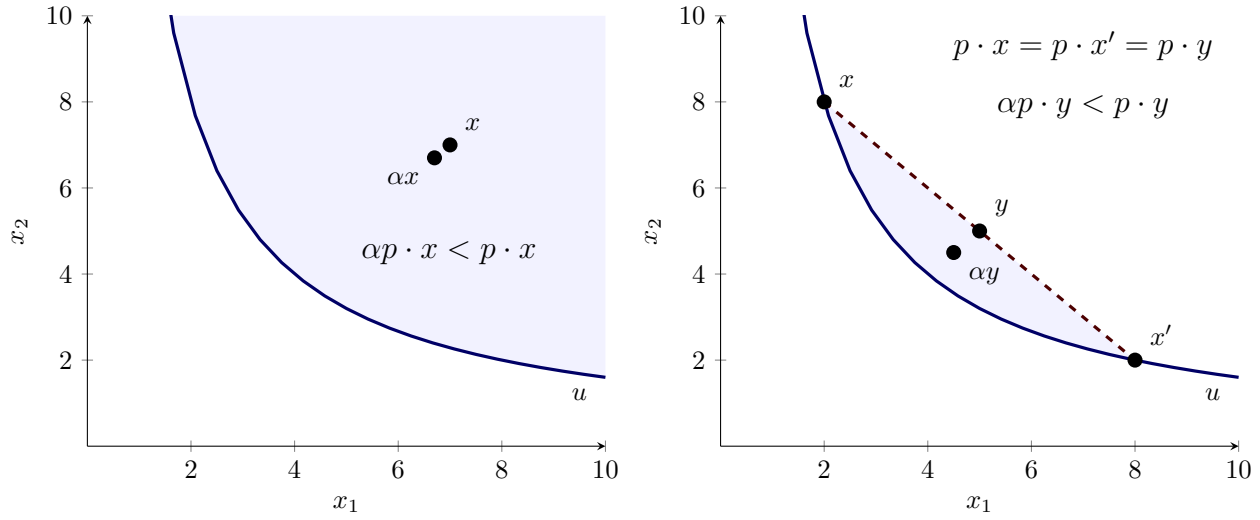


Figure 5.5: No exceso de utilidad y unicidad en la solución

No exceso de utilidad: Esto es análogo a la Ley de Walrás, y es un resultado directo de la continuidad de la función de utilidad. Por contradicción, supongamos que existe $x \in h(p, w)$ tal que $u(x) > u$. Entonces, por continuidad de $u(x)$, existe una $\alpha \in (0, 1)$ suficientemente grande tal $u(\alpha x) > u$, y

$$p \cdot (\alpha x) = \alpha(p \cdot x) < w$$

Así, por continuidad, podemos reducir el consumo de todos los bienes en una cantidad suficientemente pequeña y así reducir el gasto sin violar la restricción de utilidad. Esto lo podemos ver gráficamente en la figura 5.5 a la izquierda.

Cuasiconcavidad de $u(x)$ y convexidad de $h(p,u)$: El argumento es idéntico que para la maximización de utilidad y la demanda marshaliana.

Cuasiconcavidad estricta de $u(x)$ y unicidad de $h(p,u)$: Por contradicción, supongamos que la solución no es única. Tomemos entonces $x, x' \in h(p,u)$, con $x \neq x'$. para cualquier $\alpha \in (0,1)$, denotemos $y \equiv \alpha x + (1-\alpha)x'$. Entonces:

$$p \cdot x = p \cdot x' = p \cdot (\alpha x + (1-\alpha)x') = p \cdot y$$

Esto es, el gasto de cualquier canasta intermedia es el mismo, por lo que debería igual ser parte de la solución. No obstante, por cuasiconcavidad estricta de $u(x)$, $u(y) > u$. Similar al no exceso de utilidad, consideramos $\alpha \in (0,1)$ suficientemente grande tal que $u(\alpha y) > u$, y así $p \cdot (\alpha y) < p \cdot x$. Esto lo podemos ver en la gráfica 5.5 a la derecha.

Diferenciabilidad: El argumento es idéntico que para la maximización de utilidad y la demanda marshaliana.

5.2.1 Ley de la Demanda Compensada

En la sección 4.3 vimos que, en la teoría de preferencias reveladas, habíamos encontrado una relación negativa entre los preicios y la demanda ante variaciones compensatorias en el ingreso. Anteriormente también habíamos señalado que la demanda hicksiana tiene una interpretación de la demanda de un bien tal que, ante cambios en los precios, se le compensa al individuo en ingreso (gasto) para alcanzar el mismo nivel de utilidad. ¿Podemos entonces encontrar una relación entre los precios y la demanda hicksiana de la misma manera en que lo hicimos para la demanda de slutsky?

Ley de la Demanda Compensada
Si la función de utilidad u es continua y diferenciable, y representa preferencias localmente no saciables, entonces la demanda hicksiana satisface:

$$(p - p') \cdot (h(p,u) - h(p',u)) \leq 0$$

Corolario: En particular, si $p' = p + (0, \ldots, \varepsilon, \ldots, 0)$, es decir, sólo cambia el precio del bien l en ε:

$$(p'_l - p_l) \times (h_l(p',u) - h_l(p,u)) \leq 0$$

Y si la función de demanda hicksiana es diferenciable, entonces:

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_l} \leq 0$$

Demostración. Por definición del problema de minimización, para cada nivel de precios p, el gasto representado por $h(p,u)$ es menor al gasto representado por cualquier otra canastas que alcanza el nivel de utilidad u. Entonces:

$$\begin{aligned} p \cdot h(p,u) &\leq p \cdot h(p',u) \\ p' \cdot h(p',u) &\leq p' \cdot h(p,u) \end{aligned}$$

Sumamos las desigualdades, lado por lado, y mantenemos el sentido de la desigualdad;

$$\begin{aligned} & p \cdot h(p,u) + p' \cdot h(p',u) \leq p \cdot h(p',u) + p' \cdot h(p,u) \\ \implies \quad & (p' - p) \cdot h(p',u) - (p' - p) \cdot h(p,u) \leq 0 \\ \implies \quad & (h(p',u) - h(p,u)) \cdot (p' - p) \leq 0 \end{aligned}$$

■.

Podemos expandir la expresión anterior en forma de sumas:

$$\sum_{l=1}^{L}(p_l' - p_l)(h_l(p', u) - h_l(p, u)) \leq 0$$

En particular, si $p_k = p_k'$, para toda $k \neq l$, entonces:

$$(p_l' - p_l)(h_l(p', u) - h_l(p, u)) + \sum_{k \neq l}^{L} \underbrace{(p_k' - p_k)}_{=0}(h_k(p', u) - h_k(p, u)) \leq 0$$

Entonces:

$$(p_l' - p_l)(h_l(p', u) - h_l(p, u)) \leq 0$$

De la expresión anterior es claro que si el precio de l aumenta de p_l a $p_l' > p_l$, entonces tiene que suceder que $h_l(p', u) \leq h_l(p, u)$, es decir, la cantidad demandada disminuye. Si bien no es posible decir que la demanda Marshalliana tiene pendiente negativa, sí podemos decir que la demanda Hicksiana tiene pendiente negativa.

Definimos $dp_l = p_l' - p_l$, y $dp = (dp_1, \ldots, dp_L)^T$. Asimismo, definimos $dh_l = h_l(p', u) - h_l(p, u)$ y $dh = (dh_1, \ldots, dh_L)^T$. La ley de la demanda compensada nos dice que:

$$dp^T dh \leq 0 \tag{5.7}$$

Asumamos que tenemos una función de demanda compensada, y que ésta es diferenciable. Como mantenemos el nivel de utilidad u constante, podemos escribir:

$$dh_l = \frac{\partial h_l}{\partial p_1}dp_1 + \cdots + \frac{\partial h_l}{\partial p_L}dp_L = D_p h_l \cdot dp$$

Entonces:

$$dh = D_p h(p, u)dp$$

donde

$$D_p h(p, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} & \frac{\partial h_1}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial p_L} \\ \frac{\partial h_2}{\partial p_1} & \frac{\partial h_2}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_L}{\partial p_1} & \frac{\partial h_L}{\partial p_2} \cdots & \frac{\partial h_L}{\partial p_L} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión 5.7:

$$dp^T D_p h(p, u)dp \leq 0$$

Lo cual, por definición, implica que $D_p h(p, u)$ es una matriz negativa semidefinida. Una propiedad de las matrices negativas semidefinidas es que los elementos en la diagonal son no positivos. Por lo tanto, para toda l:

$$\frac{\partial h_l(p, u)}{\partial p_l} \leq 0$$

Un argumento gráfico se puede hacer. Regresemos a la figura 5.4. Notemos que, al subir el precio del bien 1, el consumidor deja de consumir del bien 1. En el ejemplo de dos bienes con preferencias monótonas, si un consumidor deja de consumir x_1, entonces aumenta su consumo del bien 2. No obstante, cuando tenemos más de dos bienes no es posible decir si auementa o disminuye el consumo de los demás bienes.

5.2.2 Elasticidades de la demanda Hicksiana

La definición de elasticidad no cambia, aunque ahora lo utilizamos para las demandas Hicksianas. Denotamos ε_{lk}^h a la elasticidad de la demanda Hicksiana del bien l con respecto del precio del bien k, y se define como:

$$\varepsilon_{lk}^h = \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \times \frac{p_k}{h_l(p,u)} = \frac{\partial \log(h_l)}{\partial \log(p_k)}$$

Ya sabemos que $\partial h_l(p,u)\partial p_l$ es no positivo, por lo que la elasticidad de la demanda Hicksiana es no positiva. Respecto de las elasticidades cruzadas decimos que un bien x_k es, respecto del bien x_l:

- un **sustituto neto** si ante aumentos en el precio de x_k, aumenta la cantidad de la demanda hicksiana de x_l: $\varepsilon_{lk}^h > 0$
- **independiente en el neto** si ante alteraciones en el precio de x_k no alteran la cantidad de la demanda hicksiana de x_l: $\varepsilon_{lk}^h = 0$
- un **complemento neto**, si ante aumentos en el precio de x_k, disminuye la cantidad de la demanda hicksiana de x_l: $\varepsilon_{lk}^h < 0$

Definimos la elasticidad respecto del nivel de utilidad como:

$$\varepsilon_{lu}^h = \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial u} \times \frac{u}{h_l(p,u)} = \frac{\partial \log(h_l)}{\partial \log(u)}$$

En este caso, tenemos que asegurarnos de estar trabajando con niveles de utilidad positivos (o una transformación monótona), pues de otra manera la elasticidad no estaría bien definida.

- **normal en la utilidad**, si ante aumentos en la utilidad, el consumo del bien aumenta o cuando menos no disminuye: $\varepsilon_{lu}^h \geq 0$.
- **inferior en la utilidad**, si ante aumentos en el la utilidad, el consumo del bien disminuye: $\varepsilon_{lu}^h < 0$
- **neutro en la utilidad**, si ante cambios en el la utilidad, el consumo del bien se mantiene constante: $\varepsilon_{lu}^h = 0$

Un ejercicio interesante, y que se deja a los lectores, es demostrar que el bien l es normal en la utilidad si y sólo si es normal en el ingreso. Similaremente, un bien es inferior en la utilidad si y sólo si es inferior en el ingreso. Y lo mismo va para los bienes neutros en la utilidad.

En cuanto a agregaciones, no podemos hacer uso de la Ley de Walrás, pero sí de la homogeneidad de grado 0 en precios.

Si el sistema de demandas hicksianas satisface homogeneidad de grado cero en precios, entonces:

$$\sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{lk}^h = 0$$

Una vez más, esto deviene del teorema de Euler. Aquí vemos que si la función de demanda hicksiana tiene pendiente negativa, entonces tiene que tener cuando menos un sustituto neto.

5.3 La función de gasto mínimo y el Lema de Shephard

Al igual que denotamos como función de utilidad indirecta a la función valor del problema de maximización de utilidad (esto es, la función objetivo evaluada en el óptimo), denominamos función de gasto mínimo a la función valor de la minimización de gasto:

$$e(p,u) = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^L_+}\{p\cdot x : u(x)\geq u\} = p\cdot h(p,u) = \sum_{l=1}^{L} p_l h_l(p,u)$$

En el caso de dos bienes, la función de gasto mínimo es tan solo:

$$e(p,u) = p_1 h(p_1,p_2,u) + p_2 h(p_1,p_2,u)$$

La interpretación es, para cada nivel de precios p, la función de gasto mínimo $e(p,u)$ dice cuál es el menor nivel de gasto que el consumidor debe realizar para alcanzar cuando menos un nivel de utilidad u.

5.3.1 Propiedades de la función de gasto mínimo

Si la función de utilidad u es continua y representa preferencias localmente no saciables en $X = \mathbb{R}^L_+$, la función de gasto mínimo:

- Homogeneidad de grado uno en u.
- Estrictamente creciente en u y no decreciente en p_l para toda l.
- Cóncava en precios p.
- Continua en (p,u).

Demostración:

Homogénea de grado uno. Por homogeneidad de grado cero en precios para la correspondencia de demandas hicksianas, para toda $\lambda > 0$:

$$e(\lambda p,u) = (\lambda p)\cdot h(\lambda p,u) = \lambda(p\cdot h(p,u)) = \lambda e(p,u)$$

Es fácil verlo para dos bienes:

$$\begin{aligned} e(\lambda p_1,\lambda p_2,u) =& \lambda p_1 h_1(\lambda p_1,\lambda p_2,u) + \lambda p_2 h_2(\lambda p_1,\lambda p_2,u)\\ =& \lambda p_1 h_1(p_1,p_2,u) + \lambda p_2 h_2(p_1,p_2,u)\\ =& \lambda(p_1 h_1(p_1,p_2,u) + p_2 h_2(p_1,p_2,u)) = \lambda e(p_1,p_2,u)\end{aligned}$$

Creciente en u y no decreciente en p_l. Esto sigue de la propiedad de no exceso de utilidad. Por contradicción, supongamos que $u' > u$, pero $e(p,u') \leq e(p,u)$. Entonces:

$$p\cdot h(p,u') \leq p\cdot h(p,u) = \min_{x\in\mathbb{R}^K_+}\{p\cdot x : u(x)\geq u\} = e(p,u)$$

Como $u' > u$, si $e(p,u') < e(p,u)$ (desigualdad estricta) entonces lo anterior significa que $h(p,u)$ no minimiza el gasto, lo cual es una contradicción. Si $e(p,u') = e(p,u)$, entonces

$$h(p,u') \subseteq \arg\min_{x\in\mathbb{R}^K_+}\{p\cdot x : u(x)\geq u\},$$

lo cual viola la propiedad de no exceso de utilidad.

Con relación a que la función es no decreciente en precios, supongamos que $p'_l > p_l$ para algún bien l, mientras que $p'_k = p_k$ para todo $k \neq l$. Entonces:

$$\begin{aligned} e(p', u) =& p' \cdot h(p', u) = p \cdot h(p', u) + (p'_l - p_l) h_l(p', u) \\ \geq& p \cdot h(p', u) \\ \geq& p \cdot h(p, u) = e(p, u) \end{aligned}$$

de donde la última desigualdad es por definición de la correspondencia de demanda hicksiana: $p \cdot h(p, u) \leq p \cdot x$ para toda x tal que $u(x) \geq u$.

Cóncava. Antes de pasar a la demostración, veamos un ejemplo sencillo. Consideremos que inicialmente el nivel de precios está dado por $\bar{p}$, y en particular, el precio del bien l está dado por $\bar{p}_l$. Las demandas hicksianas están dadas por

$$h(\bar{p}_l, u) \equiv \bar{x} \qquad\qquad h_l(\bar{p}, u) \equiv \bar{x}_l$$

Mantengamos estas canastas constantes en $\bar{x}$, y mantengamos constantes también todos los precios distintos del bien l. Si mantenemos las cantidades constantes, entonces podemos escribir el gasto como una función del precio del bien l:

$$\bar{e}(p_l) = p_l \bar{x}_l + \sum_{k \neq l} \bar{p}_k \bar{x}_k \equiv p_l \bar{x}_l + \bar{b}$$

Lo cual es una línea recta con pendiente $\bar{x}_l$ y ordenada al origen $\bar{b}$, lo cual graficamos al lado izquierdo en la figura 5.6. La manera de interpretar esto es que si nuestro consumo es constante, entonces el gasto es una función lineal del precio. Si diario me compro 4 tacos para desayunar, entonces mi gasto diario está dado por $4 \times p_{taco}$, lo cual es una línea recta.

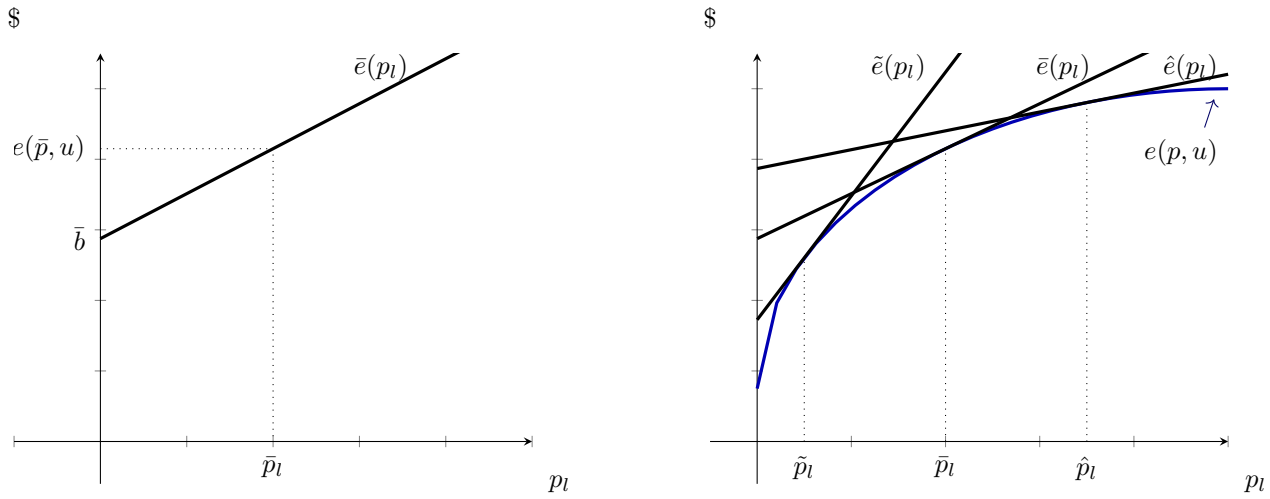


Figure 5.6: Concavidad de la función de gasto

No obstante, los consumidores no se quedan de brazos cruzados ante cambios en los precios, pasivamente comprando la misma cantidad de bienes para alcanzar el mismo nivel de utilidad. En cambio, ante un aumento en p_l, los consumidores ajustarán su consumo de tal manera que su incremento en gasto no sea tan grande como el gasto si se mantienen pasivos. En concreto, si los precios cambian de p a p', la canasta de consumo cambia de $\bar{x} = h(p, u)$ a $h(p', u)$ (por definición de la correspondencia de demanda hicksiana). Entonces, por definición del problema de minimización de gasto:

$$p' \cdot h(p', u) \leq p' \cdot \bar{x} = p' \cdot h(p, u)$$

Similarmente, si disminuye p_l, los consumidores ajustarán su consumo de tal manera que su reducción en el gasto sea todavía mayor. Así, ante un aumento en p_l, el gasto mínimo estará ligeramente por debajo de la línea recta en la gráfica a la izquierda de la figura 5.6. Lo mismo para un decremento en p_l.

Podemos recrear este ejercicio para distintos niveles de precios $\tilde{(p)}$ o $\hat{p}$, fijando las corresnpondientes demandas hicsianas en $\tilde{x} = h(\tilde{p}, u)$ y $\hat{x} = h(\hat{p}, u)$ y graficando el gasto únicamente como función de p_l manteniendo todo lo demás constante. Denotemos estas funciones como $\tilde{e}(p_l)$ y $\hat{e}(p_l)$. Todas estas rectas van a crear una envolvente sobre la función de gasto mínimo, lo cual podemos ver a la derecha de la figura 5.6. Así vemos cómo esta envolvente va en torno a una curva cóncava, la cual es nuestra función de gasto mínimo.

Formalmente, consideremos los niveles de precios p y p', y definimos $p'' = \alpha p + (1 - \alpha)p'$.

$$\begin{aligned} e(p'', u) = p'' \cdot h(p'', u) =& \alpha p \cdot h(p'', u) + (1 - \alpha)p' \cdot h(p'', u) \\ \geq& \alpha p \cdot h(p, u) + (1 - \alpha)p' \cdot h(p', u) = \alpha e(p, u) + (1 - \alpha)e(p', u) \end{aligned}$$

Continua en (p, u). El argumento es similar al de la función de utilidad indirecta, aunque aquí sabiendo que el gasto es continuo en los precios.

5.3.2 El Lema de Shephard

Lema de Shephard:
Si $u(x)$ es una función de utilidad continua que representa preferencias **estrictamente convexas** y **localmente no saciables** sobre $X \subseteq \mathbb{R}^L$, y la función de gasto mínimo, dada por $e(p, u)$, es diferenciable en (p, u), entonces:

$$h_l(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_l} \quad \forall l = 1, \ldots, L$$

En notación matricial:

$$h(p, u) = D_p e(p, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_1} \\ \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(p, u) \\ h_2(p, u) \\ \vdots \\ h_L(p, u) \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso de la función de utilidad indirecta, el Lema de Shephard es un resultado del teorema de dualidad. Si bien esta demostración más formal escapa a la nota, podemos usar el teorema de la envolvente para el caso en que la función de utilidad sea continua.

El lagrangeano del problema de minimización de gasto está dado por:

$$\mathcal{L}(x, p, u, \lambda, \mu) = -p \cdot x - \lambda(u - u(x)) + \mu \cdot x$$

Y

$$-e(p, u) = -p \cdot h(p, u)$$

Entonces, por el teorema de la envolvente:

$$-\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_l} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_l}\right|_{x=h(p,u)} = h_l(p, u)$$

Regresemos a nuestro ejemplo con la función Cobb-Douglas:

$$h_1(p_1,p_2,u) = u\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} \qquad h_2(p_1,p_2,u) = u\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}$$

Nuestra función de gasto mínimo está dada por:

$$\begin{aligned}
e(p_1,p_2,u) =& p_1h_1(p_1,p_2,u) + p_2h_2(p_1,p_2,u)\\
=& p_1u\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} + p_2u\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}\\
=& up_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]\\
=& up_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right][\alpha+(1-\alpha)]\\
=& up_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right]
\end{aligned}$$

Por el Lema de Shephard:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(p_1,p_2,u)}{\partial p_1} =& \alpha up_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}\left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right]\\
=& u\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha}\left[\alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right]\\
=& u\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} = h_1(p_1,p_2,u)
\end{aligned}$$

5.3.3 Simetría en las funciones de demanda hicksiana

Consideremos la función de gasto mínimo $e(p,u)$. El Lema de Sheperd nos dice que

$$h(p,u) = D_pe(p,u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_1} \\ \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_L} \end{pmatrix}$$

Por su parte, el Jacobiano de la función de demanda hicksiana:

$$D_ph(p,u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_1} & \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_2}\cdots & \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_L} \\ \frac{\partial h_2(p,u)}{\partial p_1} & \frac{\partial h_2(p,u)}{\partial p_2}\cdots & \frac{\partial h_2(p,u)}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_L(p,u)}{\partial p_1} & \frac{\partial h_L(p,u)}{\partial p_2}\cdots & \frac{\partial h_L(p,u)}{\partial p_L} \end{pmatrix}$$

Esta es la **matriz de sustitución**, partiendo de las demandas Hicksianas. No obstante, como $h(p,u) = D_pe(p,u)$, entonces:

$$D_ph(p,u) = D_p(D_pe(p,u)) = D_p^2e(p,u)$$

y

$$D_p h(p,u) = D_p^2(p,u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_1 \partial p_2} \cdots & \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_1 \partial p_L} \\ \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_2^2} \cdots & \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_2 \partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_L \partial p_1} & \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_L \partial p_2} \cdots & \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_L^2} \end{pmatrix}$$

Consideremos dos bienes distintos l y k. Dado que $h_l(p,u) = \partial e(p,u)/\partial p_l$, las matrices anteriores nos dicen que:

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_l \partial p_k} \qquad \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_k \partial p_l}$$

Para las demandas Marshalianas, **NO** hay ninguna propiedad que nos diga que:

$$\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k(p,w)}{\partial p_l}$$

Y como regla general,

$$\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} \neq \frac{\partial x_k(p,w)}{\partial p_l}$$

Asimismo, cuando analizamos la matriz de sustitución de Slutsky en la sección 4.3.1, dijimos que no había ninguna propiedad que permitiera inferir simetría de dicha matriz.

No obstante, para la demanda Hicksiana, sí tenemos simetría. Para esto, haremos uso del Teorema de Young:

Teorema de Young
Para una función $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ de la clase C^2:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

De otra forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

El teorema de Young nos dice que el orden de las derivadas parciales no importa, siempre obtendremos el mismo resultado. En nuestro caso, esto implica que:

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_l}\right) = \frac{\partial}{\partial p_l}\left(\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l}$$

Esto quiere decir que la matriz de sustitución $D_p h(p,u)$ es simétrica. La simetría en esta matriz de sustitución deriva de la dualidad entre las demandas hicksianas (compensadas manteniendo el nivel de utilidad constante) y las demandas marshallianas (no compensadas). Regresaremos a esto más adelante.

5.4 Dualidad entre UMAX y GMIN

Planteamos un escenario: supongamos que un consumidor tiene un ingreso w, y enfrenta un nivel de precios p. El consumidor tiene preferencias localmente no saciables y continuas representables por una función de utilidad $u(x)$. El consumidor maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria, y decide comprar la canasta $x(p,w)$:

$$x(p,w) = \arg\max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{u(x) : p \cdot x \leq w\}$$

Asimismo, alcanza un nivel de utilidad $V(p, w)$:

$$V(p, w) = \max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{u(x) : p \cdot x \leq w\}$$

Preguntémonos ¿cuál es el gasto mínimo que debe realizar el consumidor para alcanzar este nivel de utilidad, para el mismo nivel de precios p?

$$e(p, V(p, w)) = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x : u(x) \geq V(p, w)\}$$

En la figura 5.7 a la izquierda podemos ver el problema de maximización de utilidad

Algo que salta inmediatamente a la vista es que la canasta $x(p, w)$ es la misma que la canasta $h(p, u^*)$. Formalmente:

$$x(p, w) = h(p, u^*) = h(p, V(p, w)) = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x : u(x) \geq V(p, w)\}$$

Entonces, el gasto mínimo está dado por:

$$e(p, V(p, w)) = p \cdot h(p, V(p, w)) = p \cdot x(p, w) = w$$

donde la última igualdad se debe a la Ley de Walrás.

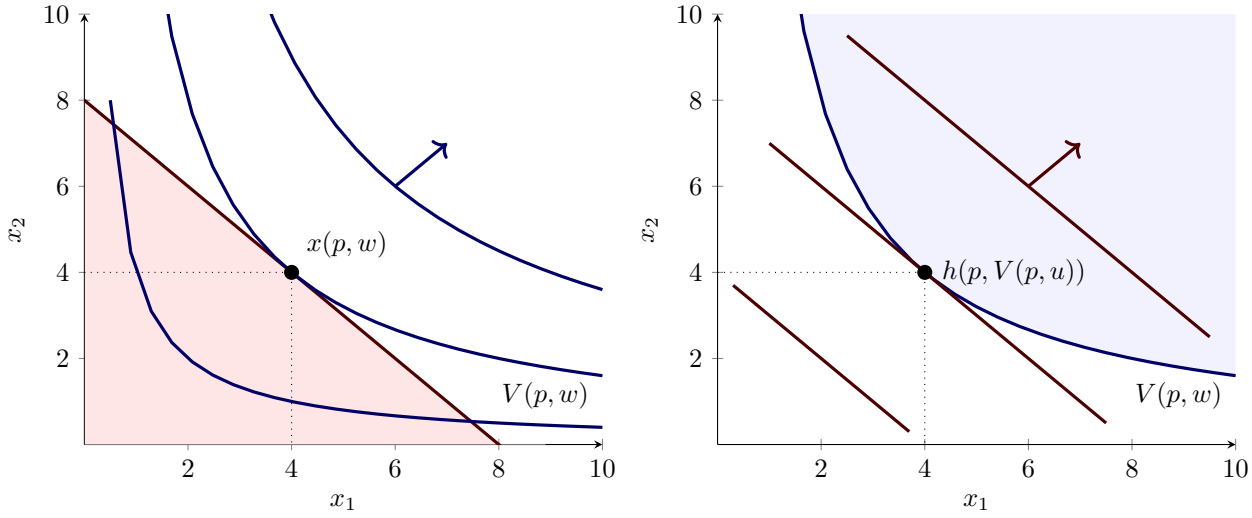


Figure 5.7: GMIN, problema dual de UMAX

Podemos hacer el procedimiento al revés. Para el mismo consumidor, fijemos su nivel de utilidad en un nivel u y minimicemos el gasto. El consumidor elegirá la canasta

$$h(p, u) = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x : u(x) \geq u\}$$

e incurrirá en un gasto de

$$e(p, u) = p \cdot h(p, u) = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x : u(x) \geq u\}$$

Cabe preguntarse, qué nivel de utilidad alcanzará el individuo si le damos un ingreso igual a este gasto mínimo $w = e(p, u)$ y dejamos que maximice utilidad? En la gráfica 5.8 podemos ver el problema de minimización de gasto al lado izquierdo, y al lado derecho, el de maximización de utilidad cuando asumimos que $w = e(p, u)$.

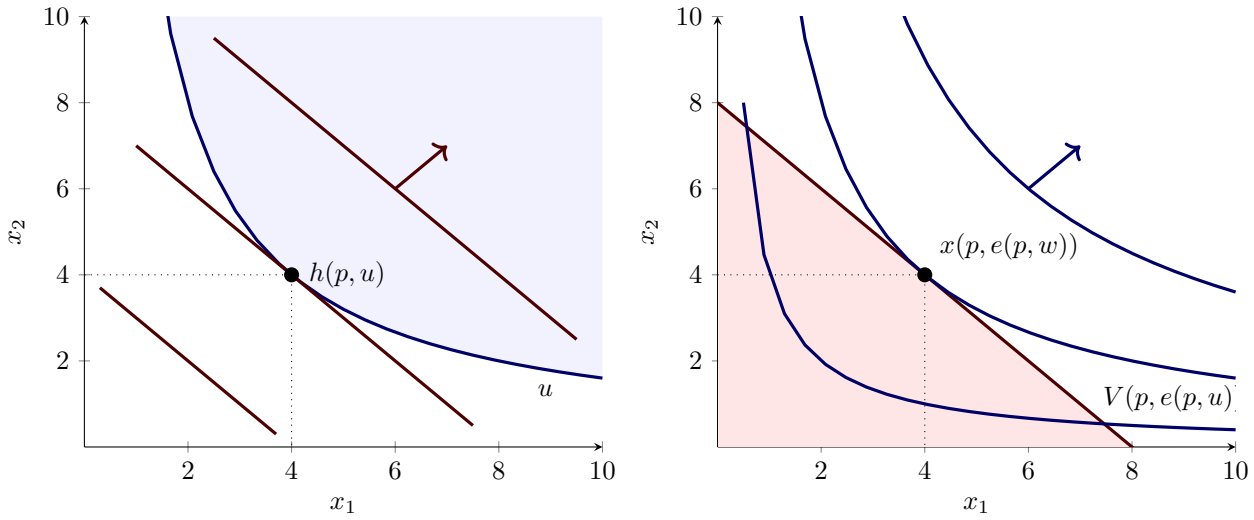


Figure 5.8: UMAX, problema dual de EMIN

Salta a la vista inmediatamente que las canastas son las mismas en ambos problemas:

$$h(p,u) = x(p,e(p,u)) = \arg\max_{x\in\mathbb{R}^L_+}\{u(x) : p\cdot x \leq e(p,u)\}$$

Y que el nivel de utilidad alcanzado es u:

$$V(p,e(p,u)) = u(x(p,e(p,u))) = u(h(p,u)) = u$$

donde la última igualdad es la propiedad de no exceso de utilidad de la demanda compensada $h(p,u)$, misma que dijimos es un análogo de la Ley de Walrás.

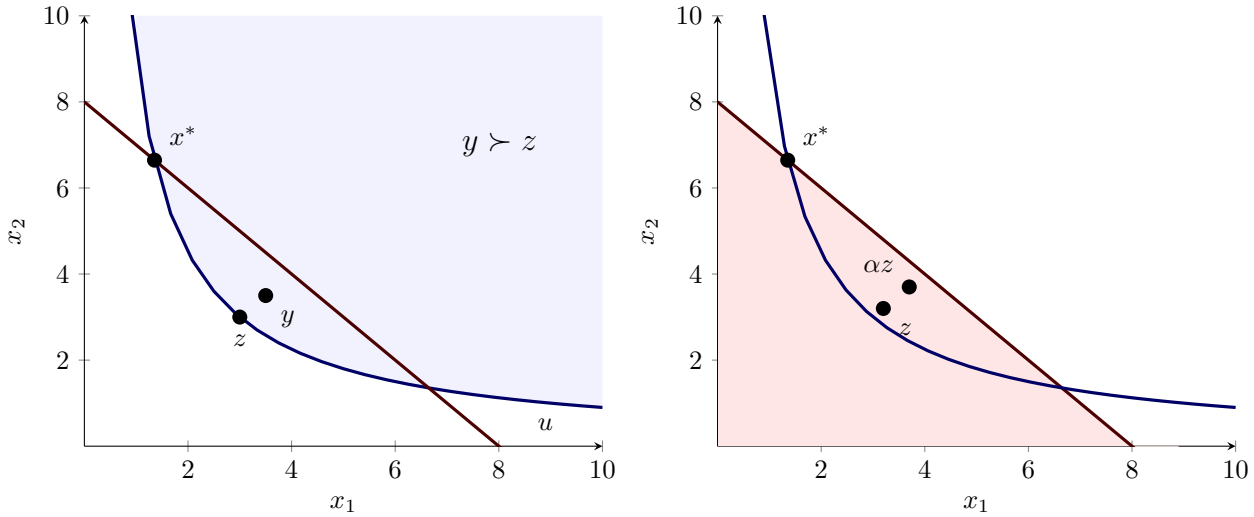


Figure 5.9: Demostración de la dualidad entre UMAX y GMIN

Pongámoslo todo junto.

Dualidad entre UMAX y GMIN
Supongamos que u es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencias localmente

no saciable en $\mathbb{R}^L_+$, y que los precios son estrictamente positivos $p \gg 0$.

1. Si x^* es una solución al problema de maximización de utilidad para $w > 0$, entonces x^* es una solución al problema de minimización de gasto cuando $u = u(x^*)$:

$$x(p, w) = h(p, V(p, w))$$

Más aún, el gasto minizado es igual al ingreso w:

$$e(p, V(p, w)) = w$$

2. Si x^* es una solución al problema de minimización de gasto para $u > u(0)$, entonces x^* es una solución al problema de maximización de utilidad cuando $w = p \cdot x^*$:

$$h(p, u) = x(p, e(p, u))$$

Más aún, el nivel de utilidad maximizado es igual a u:

$$V(p, e(p, u)) = u$$

Demostración:

Para el punto 1., supongamos por contradicción que x^* es solución al problema de maximización de utilidad, pero no al de minimización de gasto para $u \geq u(x^*)$. Entonces existe una $z \in \mathbb{R}^L_+$ tal que $u(z) \geq u(x^*)$ y $p \cdot z < p \cdot x^* \geq w$. Esto es, existe otra canasta que cumple con la restricción de utilidad, pero que representa un menor gasto.

Por no saciabilidad local, existe una canasta y suficientemente cercana a z tal que $u(y) > u(z)$ y $p \cdot y < p \cdot x^*$ (es decir, la canasta y sigue representando un gasto menor a x^*, pues está suficientemente cerca de z). En palabras y satisface la restricción presupuestal, y da un nivel de utilidad mayor a x^*. Esto contradice que x^* sea una solución al problema de maximización de utilidad.

Esto lo representamos en la gráfica de la izquierda de la figura 5.9. Notamos que si x^* "maximiza" utilidad, pero no minimiza el gasto, entonces podemos obtener la misma utilidad a un menor gasto, en la canasta z. Después utilizamos el ingreso sobrante para comprar la canasta y, que nos da un nivel de utilidad mayor a x^*, lo cual genera la contradicción.

La demostración del caso 2. es muy similar. Dado que $u > u(0)$ y $u(x^*) \geq u$, entonces lo primero que tiene que suceder es que la canasta $x^* \neq 0$. Y por lo tanto, $p \cdot x^* > 0$. Ahora, supongamos por contradicción que x^* es una solución al problema de minimización de gasto cuando la utilidad mínima es u, pero no es solución al problema de maximización de utilidad cuando el ingreso es igual a $w = p \cdot x^*$. Entonces existe una canasta z tal que:

$$u(z) \geq u(x^*) \geq u \quad \text{y además} \quad p \cdot z \leq w = p \cdot x^*$$

Esto es, la canasta z satisface la restricción presupuestal cuando $w = p \cdot x^*$, pero da un nivel de utilidad mayor a x^* (ya que x^* no maximiza utilidad). Por continuidad de la función de utilidad, existe una $\alpha \in (0, 1)$ suficientemente cercana a 1 tal que $u(\alpha z) > u(x^*)$ y $p \cdot \alpha z \leq p \cdot x^*$. Es decir, la canasta αz sigue dando una mayor utilidad que x^* por estar suficientemente cercana a z, y por lo mismo no viola la restricción presupuestal. Lo anterior es una contradicción al hecho de que x^* minimiza el gasto para u.

Esto lo representamos gráficamente en la figura 5.9 a la derecha. Supongamos que x^* minimiza el gasto, el cual se representa por la recta roja. El área sombreada ahora es la restricción presupuestal. Como no maximiza utilidad, el agente puede moverse a otra canasta dentro del área sombreada que le de un mayor nivel de utilidad.

5.4.1 Un ejemplo sencillo

En la sección 3.2.1 realizamos un ejemplo de maximización de utilidad con una función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2_+} \{x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w\}$$

Obtuvimos nuestras funciones de demanda:

$$x_1(p_1, p_2, w) = \alpha \frac{w}{p_1} \qquad x_2(p_1, p_2, w) = (1-\alpha)\frac{w}{p_2}$$

Entonces, la función valor está dada por:

$$V(p_1, p_2, w) = w \left(\alpha \frac{1}{p_1}\right)^\alpha \left((1-\alpha)\frac{1}{p_2}\right)^{1-\alpha} \tag{5.8}$$

A partir de esto, queremos obtener la función de demanda Hicksiana y la función de gasto mínimo.

Para esto, usemos la propiedad de que $u = V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$. Utilizamos la ecuación (5.8), y sustituimos w por $e(p_1, p_2, u)$, e igualamos todo esto a u:

$$u = e(p_1, p_2, u) \left(\alpha \frac{1}{p_1}\right)^\alpha \left((1-\alpha)\frac{1}{p_2}\right)^{1-\alpha}$$

Ahora sólo queda despejar $e(p_1, p_2, u)$:

$$e(p_1, p_2, u) = u p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right]$$

Notamos que esta es la misma función de gasto mínimo que obtuvimos en 5.1.1. Para obtener las funciones de demanda Hicksiansa, basta con utilizar el Lema de Shephard, como hicimos en la sección 5.1.1. No obstante, podemos intentar usar la otra propiedad de dualidad:

$$\begin{aligned} h(p_1, p_2, u) =& x(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = \alpha \frac{e(p_1, p_2, u)}{p_1} \\ =& \alpha u p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] \frac{1}{p_1} \\ =& u \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} \left[\alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] \\ =& u \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Y nuevamente, esto es la misma función de demanda Hicksiana que obtuvimos en 5.1.1.

Podemos hacer el caso inverso. Partimos de esta función de gasto mínimo, y debemos obtener las demandas marshalianas. Sabemos que

$$w = e(p_1, p_2, V(p_1, p_2, w))$$

Sustituimos en la función de gasto mínimo:

$$w = V(p_1, p_2, w) p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right]$$

Y despejando para $V(p_1, p_2, w)$ debemos obtener la función valor:

$$V(p_1, p_2, w) = w\left(\alpha\frac{1}{p_1}\right)^{\alpha}\left((1-\alpha)\frac{1}{p_2}\right)^{1-\alpha}$$

Para obtener las demandas Marshallianas, basta con utilizar la identidad de Roy, o utilizar la propiedad de dualidad

$$x(p_1, p_2, w) = h(p_1, p_2, V(p_1, p_2, w))$$

5.5 La ecuación de Slutsky

En la sección 4.3, introdujimos el concepto de variación compensatoria a la Slutsky, como el cambio en el ingreso de un consumidor tal que su ingreso real se mantenga constante. Utilizando esta noción, Slutsky aisló el efecto sustitución del efecto ingreso en la demanda Walrasiana. Cabe preguntarse si podemos hacer algo similar para la teoría de la maximización de utilidad, y la demanda Marshaliana.

Supongamos nuevamente que tenemos una solución única a los problemas de maximización de utilidad y de minimización de gasto. Por dualidad:

$$x(p, e(p, u)) = h(p, u)$$

En donde $h(p, u)$ es la demanda hicksiana y, como vimos anteriormente, puede interpretarse como la sustitución que hacen los agentes entre vienes con tal de mantener su nivel de utilidad constante, minimizando gasto. Para determinado nivel de ingreso w, el consumidor alcanza un nivel de utilidad u, por lo que, nuevamente por dualidad, $w = e(p, u)$. Obteniendo el jacobiano de la ecuación anterior, y sustituyendo $e(p, u)$ por w después, obtenemos la matriz de Slutsky.

Matriz de Slutsky en la maximización de utilidad
Si un individuo tiene preferencias continuas y localmente no saciables representadas por una función de utilidad u de la clase C^2, y deriva su función de demanda $x(p, u)$ del problema de maximización de utilidad, entonces la matriz de sustitución de slutsky, manteniendo el nivel de utilidad constante, está dada por:

$$\underbrace{D_p x(p,w)}_{\text{Efecto total}} + \underbrace{D_w x(p,w) x(p,w)^T}_{\text{Efecto ingreso}} = \underbrace{D_p h(p,u)}_{\text{Efecto sustitución}} \tag{5.9}$$

En particular, para el elemento ij de dicha matriz:

$$\underbrace{\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}}_{\text{Efecto total}} + \underbrace{\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,u)}_{\text{Efecto ingreso}} = \underbrace{\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}}_{\text{Efecto sustitución}}$$

Podemos hacer esto paso por paso. Empecemos para un bien en particular l. Por dualidad, sabemos que $x_l(p, e(p, u)) = h_l(p, u)$. Derivamos respecto a p_k:

$$\frac{\partial x_l(p, e(p,u))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l e(p,u)}{\partial e}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}$$

Por el Lema de Shephard, $\partial e/\partial p_k = h_k$. Y por dualidad, $h_k = x_k$. Adicionalmente, $e(p, u) = w$. Sustituyendo ambas expresiones:

$$\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} h_k(p,u) = \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}$$

Finalmete, $h_k(p, u) = x_k(p, e(p, u)) = x_k(p, w)$. Sustituyendo esta última expresión:

$$\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,u) = \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}$$

Algo que salta a la vista es que el lado izquierdo de la ecuación (5.9) resulta idéntico a la matriz de Slutsky definida en la ecuación (4.2). Esto se debe a que la matriz se define para cambios infinitesimales. Así, ante un cambio infinitesimalmente pequeños en los precios, tanto el ingreso real como la utilidad en términos de dinero disminuyen igualmente infinitesimalmente; la diferencia entre los efectos sustitución de mantener el ingreso real constante (Slutsky) y el de mantener la utilidad constante (Hicks) se vuelve cero.

No obstante lo anterior, hay una diferencia importante entre la matriz de sustitución de Slutsky del capítulo anterior, y la del presente capítulo. En particular, por el lema de Shephard:

$$D_p h(,u) = D_p^2 e(p,u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 e}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 e}{\partial p_1 \partial p_2} & \cdots & \frac{\partial^2 e}{\partial p_1 \partial p_L} \\ \frac{\partial^2 e}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 e}{\partial p_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 e}{\partial p_2 \partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 e}{\partial p_L \partial p_1} & \frac{\partial^2 e}{\partial p_L \partial p_2} & \cdots & \frac{\partial^2 e}{\partial p_L^2} \end{pmatrix}$$

Y por el teorema de Young,

$$\frac{\partial^2 e}{\partial p_l \partial p_k} = \frac{\partial^2 e}{\partial p_k \partial p_l}$$

Esto quiere decir que la matriz de sustitución de Slutsky es simétrica siempre y cuando derive de un problema de maximización de utilidad (con la minimización de gasto como problema dual).

Los economistas no observamos el efecto sustitución, sino que sólo observamos el efecto total. Podemos así descomponer el efecto total de un cambio en precios, para el bien l:

$$\underbrace{\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}}_{\text{Efecto total}} = \underbrace{\frac{\partial h_l(p,w)}{\partial p_k}}_{\text{Efecto sustitución}} \underbrace{- \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)}_{\text{Efecto ingreso}}$$

Esto lo podemos ver en la figura 5.10. Del lado izquierdo ilustramos el cambio del precios de p a p' como pasar de la restricción presupuestal sólida a la línea punteada. Cuando los precios son p, el consumidor adquiere la canasta $x(p,w)$, y alcanza un nivel de utilidad u. Cuando los precios son p', el consumidor adquiere la canasta $x(p',w)$, y alcanza un nivel de utilidad u'.

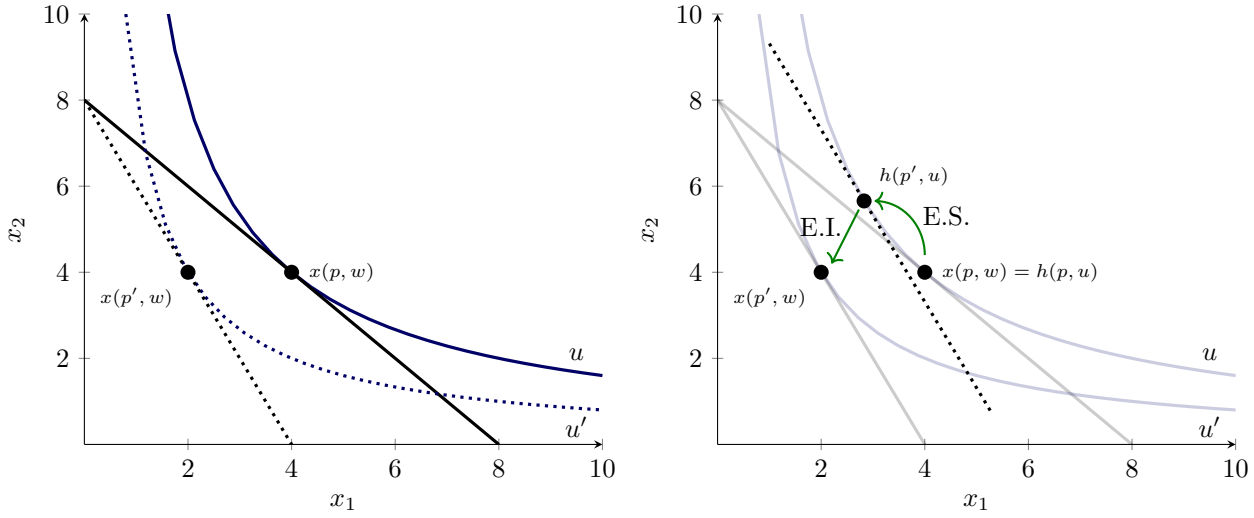


Figure 5.10: Efecto Sustitución y Efecto Ingreso

Al lado derecho de la misma figura 5.10 descomónemos este efecto total del precio. Primero, fijamos el nivel de utilidad en u, y preguntamos cuál es la canasta que consumiría el agente si los precios fueran p' y quisiera minimizar gasto. Esta canasta está representada por $h(p',u)$. El cambio de $x(p,w)$ a $h(p',u)$ lo denominamos

el **efecto sustitución**. Esto lo podemos interpretar como el agente resistiéndose a la pérdida en utilidad, y sustituyendo entre bienes para mantener su nivel de utilidad minimizando gasto. En el caso anterior, notamos que ante aumentos en el precio del bien 1, necesariamente disminuye el consumo de este bien.

No obstante, es notorio que esta canasta ya no es costeable. El agente es ahora relativamente más pobre, y tiene que ajustar su consumo. Este cambio relativo en el ingreso se representa por la contracción de la recta de gasto (linea punteada en la gráfica izquierda) hasta alcanzar el ingreso del individuo. Este cambio entre $h(p', u) = h(p', V(p, w))$ a $x(p', w)$ lo denominamos el **efecto ingreso**.

En el ejemplo anterior, notamos del efecto ingreso que de $h(p', u)$ a $x(p', w)$, el consumo de ambos bienes disminuye. Esto significa que ambos bienes son normales al ingreso. En particular, para el bien 1, del efecto sustitución resulta una disminución de x_1 ($h_1(p', u) < x_1(p, w)$), y del efecto ingerso también resulta una disminución de este bien ($x_1(p', w) < h_1(p', u)$). Para este ejemplo, los efectos ingreso y sustitución se refuerzan:

$$\underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial p_1}}_{(-)} = \underbrace{\frac{\partial h_1}{\partial p_1}}_{(-)} \underbrace{- \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial w}}_{(+)} \underbrace{x_1}_{(+)}}_{(-)}$$

Pudimos haber considerado el caso en el que el bien x_1 fuera un bien inferior, esto es, $\partial x_1/\partial w < 0$:

$$\underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial p_1}}_{(?)} = \underbrace{\frac{\partial h_1}{\partial p_1}}_{(-)} \underbrace{- \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial w}}_{(-)} \underbrace{x_1}_{(+)}}_{(+)}$$

En este caso en particular, el efecot sustitución es negativo, mientras que el efecto ingreso es positivo. El efecto total es ambiguo, pues depende de la magnitud relativa de ambos efectos. Para la mayoría de los bienes inferiores, el efecto sustitución es mayor al efecto ingreso, ambos en valor absoluto. En este caso, estamos frente a un **bien ordinario**:

$$\underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial p_1}}_{(-)} = \underbrace{\frac{\partial h_1}{\partial p_1}}_{(-)} \underbrace{- \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial w}}_{(-)} \underbrace{x_1}_{(+)}}_{(+)}$$

No obstante, la teoría de la maximización de la utilidad no descarta la posibilidad de que el efecto ingreso sea mayor al efecto sustitución, ambos en valor absoluto. En este caso, el efecto de un incremento en el precio de un bien es que el consumo de dicho bien aumenta:

$$\underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial p_1}}_{(+)} = \underbrace{\frac{\partial h_1}{\partial p_1}}_{(-)} \underbrace{- \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial w}}_{(-)} \underbrace{x_1}_{(+)}}_{(+ \text{ y grande})}$$

A este tipo de bienes los denominamos **bienes de Giffen**, algo que ya habíamos introducido en la sección 3.5. Aquí entonces tenemos un resultado importante: si un bien es **Giffen**, entonces es un bien inferior. Esto concuerda con la historia que Alfred Marshall cuenta sobre su interacción con Sir Robert Giffen. En el relato, el último comenta que es posible imaginar un caso en el que el precio de un bien de primera necesidad aumenta a tal grado que ya no se puede comprar nada más. En este caso, el agente se vería forzado a consumir más de este bien cuyo precio aumentó.

Más sobre los bienes Giffen
Un ejemplo común que se ha dado es el de las papas en Irlanda durante la hambruna de 1845-1852. En este caso, el precio de las papas aumentó tanto que los campesinos irlandeses se vieron forzados a disminuir su consumo de carne, y aumentar su consumo de papas. Este es un mal ejemplo, puesto que la hambruna representó un fenómeno de equilibrio general (el análisis que llevamos hasta ahora es de equilibrio parcial). Si la hambruna redujo en casi 3/4 partes la producción de papas, no es muy realista pensar que el consumo de papas haya aumentado. Si bien podríamos pensar que ocurrió sólo para los hogares más ricos, no hay evidencia al respecto.
Lo cierto es que los bienes Giffen son más una curiosidad intelectual, y menos un fenómeno extendido. Desde su proposición, los pocos ejemplos que se han propuesto han sido insatisfactorios para los economistas, y ha resultado como un unicornio: la teoría no dice que no pueden existir, simplemente no hemos encontrado alguno. Existen estudios de laboratorio, pero las condiciones distan de ser cercanas a la realidad diaria. Y pese a que se hace mucho énfasis en este tipo de bienes en los cursos de microeconomía intermedia, lo cierto es que son contados los economistas que le dedican tiempo a estudiarlos en su carrera académica o profesional.
No obstante, un candidato viable, en mi opinión, es el arroz en China. Robert T. Jensen y Nolan H. Miller tienen un ensayo de 2008 titulado *Giffen Behavior and Subsistence Consumption*, publicado en el *American Economic Review*, en el que estudian un programa de subsidios al arroz. En particular, encuentran que el subsidio (caída en el precio) disminuye el consumo de arroz, consistente con la conducta de bienes Giffen.

El análisis de la ecuación de Slutsky puede representarse de manera gráfica para cualquier combinación de casos que permita la teoría económica. Tomemos la gráfica en la figura 5.11. Esta gráfica representa el efecto sustitución de un incremento únicamente en el precio del bien x_1. La línea sólida deltada muestra la restricción presupuestal inicial, mientras que la recta punteada muestra el gasto mínimo a los nuevos precios, cuando la utilidad es u. El efecto sustitución dice que x_1 disminuye, y como sólo hay dos bienes, x_2 tiene que aumentar. Partiendo de este punto, según donde caiga la nueva canasta óptima $x(p', w)$ sobre la nueva restricción presupuestal (línea recta sólida) podemos determinar el tipo de bien que es x_1 respecto a su precio, x_2 respecto al precio cruzado, y ambos bienes respecto al ingreso.

Si el punto inicial es $x(p, w)$ y el punto final es $x(p', 2)$, entonces medimos el efecto total del cambio en precio:

Respecto al aumento en el precio del bien x_1:

- Si $x_1(p', w) < x_1(p, w)$, entonces x_1 es un bien ordinario, si $x_1(p', w) = x_1(p, w)$, entonces x_1 es un bien perfectamente inelástico, y si $x_1(p', w) > x_1(p, w)$, entonces x_1 es un bien de Giffen.
- Si $x_2(p', w) > x_2(p, w)$, entonces x_2 es un sustituto bruto de x_1, si $x_2(p', w) = x_2(p, w)$, entonces x_2 es independiente brupo de x_1, y si $x_2(p', w) < x_2(p, w)$, entonces x_2 es un complemento bruto de x_1.

Si partimos de $h(p', u)$ y queremos llegar a $x(p', w)$, entonces estamos midiendo el efecto ingreso.

- Si $x_l(p', w) < h_1(p', u)$, entonces x_l es un bien normal, si $x_l(p', w) = h_l(p', u)$, entonces x_l es un bien neutro al ingreso, y si $x_l(p', w) > h_l(p', u)$, entonces x_l es un bien inferior.

De la gráfica en la figura 5.11 es posible ver algunos resultados que anteriormente ya habíamos mostrado matemáticamente. El primero es que no es posible que todos los bienes sean inferiores, pero sí que sean todos normales. El segundo es que si un bien es Giffen, entonces tiene que tener un complemento bruto, y necesariamente es inferior. Finalmente, observamos que todo bien normal es necesariamente ordinario.

La gráfica representa únicamente el caso de dos bienes, de donde se pueden desprender otras conclusiones como que si el otro bien es inferior, entonces es un sustituto bruto, y el complemento bruto es normal. Esto sólo ocurre para el caso de dos bienes, y es un ejercicio que se deja a los lectores demostrarlo con las agregaciones de la sección 3.5. No obstante, esto no es un resultado generalizable a más de dos bienes.

Para terminar esta sección, la ecuación de Slutsky puede ser representada igualmente en términos de elastici-

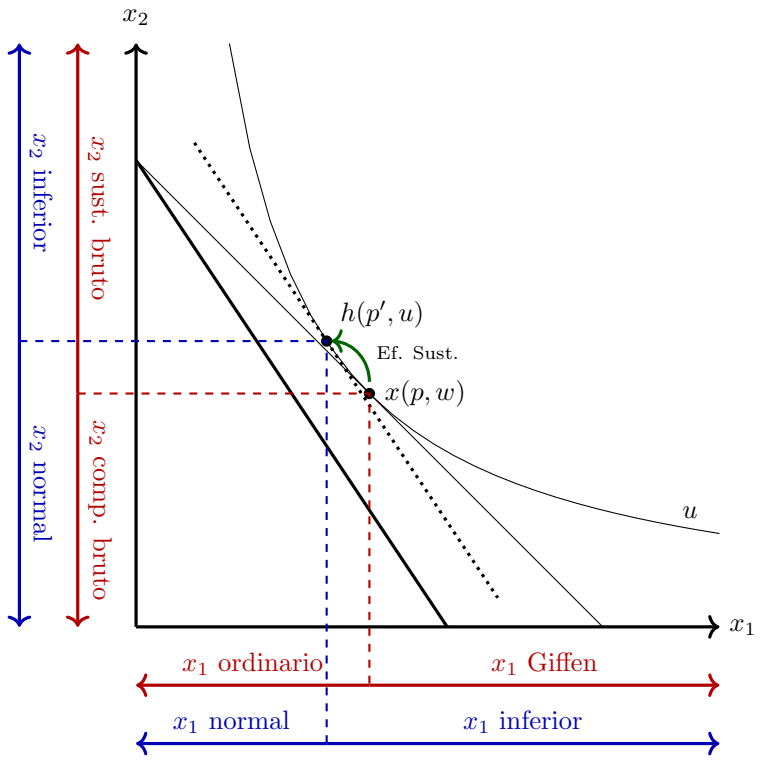


Figure 5.11: Efecto Sustitución y Efecto Ingreso

dades. Retomemos la ecuación:

$$\frac{\partial x_l}{\partial p_k} = \frac{\partial h_l}{\partial p_k} - \frac{\partial x_l}{\partial w} x_k$$

Multiplicando ambos lados por p_k/x_l, y multiplicando el efecto ingreso por $1 = w/w$:

$$\frac{p_k}{x_l}\frac{\partial x_l}{\partial p_k} = \frac{p_k}{x_l}\frac{\partial h_l}{\partial p_k} - \frac{w}{w}\frac{p_k}{x_l}\frac{\partial x_l}{\partial w} x_k$$

Reordenando y expresando en términos de elasticidades:

$$\varepsilon_{lk} = \varepsilon^h_{lk} - \varepsilon_{lw} b_k$$

donde b_k representa la proporción del ingreso gastada en el bien x_k.

Para una variación en el precio del bien que se está analizando:

$$\varepsilon_{ll} = \varepsilon^h_{ll} - \varepsilon_{ll} b_l$$

donde $\varepsilon_l l^h \leq 0$. Así se ve que, para que un bien sea Giffen, es necesario que la elasticidad la elasticidad ingreso sea muy negativa, y en general que desde antes el agente estuviera gastando una proporción muy grande de su ingreso en el bien. Esto refuerza la idea de que los bienes Giffen en general son de necesidad básica, y su conducta se presenta en general para los consumidores con bajo ingreso.

Esta representación permite ver que, para bienes normales, la elasticidad precio de la demanda marshaliana es mayor, en términos absolutos, que la elasticidad precio de la demanda hicksiana. Este se debe a que el efecto ingreso refuerza al efecto precio, y el consumidor responde más a un cambio en los precios. Por el contrario, para bienes inferiores, el efecto ingreso contrarresta al efecto sustitución, por lo que hay menor respuesta del consumidor. Así, para bienes inferiores, la elasticidad precio de la demanda marshaliana es menor en términos absolutos que la elasticidad precio de la demanda hicksiana.

Es interesante observar que, para el caso de bienes neutrales al ingreso, las elasticidades precio son iguales para la demanda marshaliana que para la demanda hicksiana. Entonces, si un bien es neutral al ingreso, tiene que ocurrir que la demanda hicksiana sea igual a la demanda marshaliana. Un ejemplo de esto se da en la sección 6.3.1.

6 Análisis del bienestar

Poder predecir la función de demanda de un consumidor pareciera ser suficiente para realizar la mayoría de las funciones de un economista. En cursos introductorios de economía se ha analizado cómo cambian los precios y las cantidades demandadas ante la introducción de impuestos y subsidios, o precios máximos o mínimos. Asimismo, los cursos introductorios habrán tocado temas de monopolio y competencia perfecta, y similarmente cómo difieren los precios y los niveles de producción bajo estas dos estructuras de mercado.

Sin embargo, la teoría del consumidor no se agota en el análisis de la demanda. Un tema de interés para los economistas no sólo son los precios y niveles de consumo, sino también el bienestar de los consumidores en términos monetarios: cuánto pierden los consumidores ante cambios exógenos en los precios, cómo se distribuye la pérdida en el bienestar entre productores y consumidores ante la introducción de un impuesto, o cuánto se gana en bienestar al pasar de un mercado en monopolio a uno en competencia perfecta.

En estos cursos introductorios de economía, los alumnos habrán visto el concepto de excedente del consumidor y del productor. El excedente del consumdior es el área bajo la función de demanda y por encima del precio. Lo que nos dice es, para cada unidad marginal adquirida por el consumidor, la diferencia entre el precio que estaba dispuesto a pagar y el precio que efectivamente pagó. Similarmente, el excedente del productor es el área por debajo de la función de oferta y por encima del precio: para cada unidad marginal vendida, la diferencia entre el precio que recibió el productor y el precio mínimo que estaba dispuesto a recibir por dicha unidad marginal.

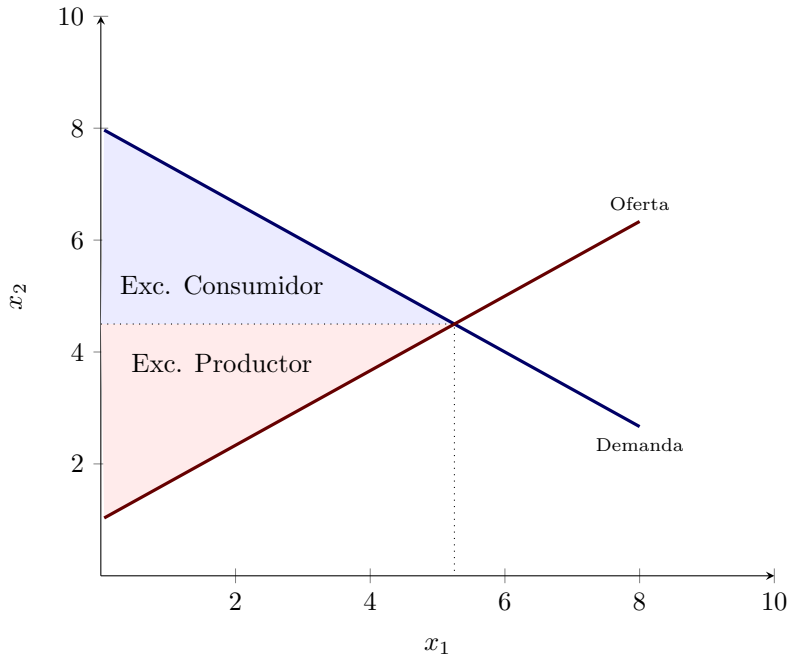


Figure 6.1: Excedente del consumidor y del productor

El excedente del consumidor es una medida intuitiva del bienestar, y cambios en el excedente del consumidor pueden ser interpretados como cambios en el bienestar del agente. Esta interpretación considera que la función de demanda es el inverso de la función de beneficio marginal. Esto es, Si la primera unidad me genera un beneficio de $10, estoy dispuesto a pagar hasta $10 por ella; si la segunda unidad me genera un beneficio de $8, estoy dispuesto a pagar $8 por ella, y así sucesivamente. No obstante, esta interpretación omite que cambios en los precios de un bien genera cambios en las demandas de otros bienes, por lo que habría que contabilizar cambios en el bienestar por efectos en todos los mercados, y no sólo en el del bien cuyo precio cambió.

En segundo lugar, en las secciones 3.7.3 y 3.7.4 vimos que las condiciones de optimalidad pueden dar una interpretación de utilidad marginal en términos del dinero, y que la Identidad de Roy permite obtener la función de demanda a partir de la función de utilidad indirecta. Esto pareciera indicar que la demanda tiene una interpretación en términos de beneficio marginal en dinero. Pero falta un paso adicional. Retomemos la identidad de Roy y la

condición de optimalidad de UMAX para un bien cuyo consumo es estrictamente positivo:

$$x_l(p,w) = \frac{\partial V(p,w)/\partial p_l}{\partial V(p,w)/\partial w} \qquad \frac{\partial u(x)/\partial x_l}{\lambda^*} = p_l$$

La interpretación de beneficio marginal requiere una normalización por el multiplicador de lagrange $\lambda^* = \partial V(p,w)/\partial w$. En el problema de maximización de utilidad, λ^* es una función de los parámetros $\lambda(p,w)$, y por tanto no es (necesariamente) constante ante cambios en el precio del bien x_l. El análisis del excedente del consumidor no considera esta variacióhn en la utilidad marginal del ingreso, por lo que no es una medida precisa del bienestar.

La teoría del consumidor que hemos desarrollado hasta ahora permite dar una respuesta más completa a la preguntas sobre cambio en el bienestar que el mero excedente del consumidor. La primera parte de esta sección está dedicada a estas medidas del bienestar que denominamos variación compensatoria y variación equivalente a la Hicks (en adelante omitiremos el "a la Hicks" por brevedad). Estas variaciones miden dos cambios distintos en el bienestar que consideran los efectos sustitución en la correspondencia de demanda. Al final, veremos que guardan una relación muy cercana a la variación en el excedente del consumidor.

Este análisis más completo, claro, requiere del conocimiento de la función de utilidad de los consumidores, la cual es imposible de observar. Una forma de sortear este problema es asumir una forma funcional para la función de utilidad, como puede ser la función de utilidad CES o la cuasilineal que vimos arriba, aunque otras formas funcionales son más utilizadas en la literatura empírica. No obstante, existe una forma de inferir las preferencias de los agentes a partir de las funciones de demanda observables. En la segunda parte de la sección introduciremos el problema de integrabilidad que permite esta inferendcia. Si bien es un tema que escapa a los cursos de microeconomía intermedia, en parte por requerir de un bagaje matemático más avanzado, se presenta aquí por completitud, y para que el lector interesado pueda profundizar en el tema.

6.1 Medidas de bienestar: variación compensatoria y equivalente a la Hicks

Para este análisis, asumiremos nuevamente que el consumidore tiene preferencias localmente no saciables, y que son representables por una función de utilidad continua y diferenciable. Consideremos un nivel de precios inicil p^0, para cierto nivel de ingreso w. Supongamos que en el futuro, los precios cambian a p^1, y que el consumidor mantiene el mismo nivel de ingreso (en caso contrario, podemos normalizar los precios para que w se mantenga igual en ambos períodos). La utilidad inicial y final del consumidor, u_0 y u_1 respectivamente, están dadas por la función de utilidad indirecta:

$$u^0 = V(p^0, w) \qquad u^1 = V(p^1, w)$$

Una aproximación ingenua al cambio en el bienestar es comparar directamente los niveles de utilidad:

$$\Delta u = u^1 - u^0 = V(p^1, w) - V(p^0, w)$$

Si $\Delta u > 0$, entonces el consumidor está mejor ante el cambio en precios, y viceversa. No obstante, esta métrica sólo da un resultado cualitativo, mas nos interesa un análisis cuantitativo. Decir que la utilidad aumentó en 10 unidades no nos dice mucho, pues la función de utilidad es meramente ordinal y no cardinal. Necesitamos convertir estos niveles de utilidad a dinero.

En la sección 3.7.3 vimos que podemos multiplicar la función de utilidad indirecta por el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestal y valuado en el óptimo para obtener una utilidad en términos de dinero. Esta aproximación puede ser atractiva; por preferencias localmente no saciables, el multiplicador referido es positivo, por lo que la división es una transformación monótona de la utilidad. No obstante, esta aproximación no es valida, pues su interpretación es para normalizar cambios en la utilidad marginal de las cantidades, pero no para transformar la utilidad total del consumidor. Como ejemplo, nada impide que la función de utilidad tome valores negativos, por lo que la mera división entre el mulitplicador de lagrange no transforma utilidad a dinero, sólo la utilidad marginal.

Otra función que es estrictamente monótona en el nivel de utilidad, y que que arroja resultados en términos de dinero es la función de gasto mínimo. Fijando un nivel de precios cualquiera p podemos transformar los niveles de

utilidad u_0 y u_1 para compararlos:

$$e(p, u^1) - e(p, u^0) = e(p, V(p^1, w)) - e(p, V(p^0, w))$$

La pregunta es, ¿qué nivel de precios p debemos utilizar? Las respuestas más intuitivas son p^0 y p^1, nuestros precios iniciales y finales.

Definimos la **variación compensatoria** como:

$$VC(p^0, p^1, w) = e(p^1, V(p^1, w)) - e(p^1, V(p^0, w))$$

Definimos la **variación equivalente** como:

$$VE(p^0, p^1, w) = e(p^0, V(p^1, w)) - e(p^0, V(p^0, w))$$

Adelante, veremos que estas definiciones también pueden ser expresadas, de manera implícita, a través de la función de utilidad indirecta:

La **variación compensatoria** puede definirse implícitamente como:

$$V(p^1, w - VC(p^0, p^1, w)) = V(p^0, w)$$

La **variación equivalente** puede definirse implícitamente como:

$$V(p^0, w + VE(p^0, p^1, w)) = V(p^1, w)$$

Y por último, mostraremos que para cambios en el precio de sólo uno de los bienes, x_l, la variación compensatoria y equivalente pueden ser expresadas como un área debajo de la curva de demanda hicksiana, similar a como el excedente del consumidor se expresa como un área bajo la curva de demanda marshalliana.

Cuando sólo cambia el precio del bien x_l, la **variación compensatoria** puede ser expresada como:

$$VC(p^0, p^1, w) = \int_{p_l^1}^{p_l^0} h_l(p_l, p_{\neg l}, u^0) dp_l.$$

Similarmente, la **variación equivalente** puede ser expresada como:

$$VE(p^0, p^1, w) = \int_{p_l^1}^{p_l^0} h_l(p_l, p_{\neg l}, u^1) dp_l.$$

6.1.1 Variación compensatoria a la Hicks

Tomemos nuevamente la definición de variación compensatoria:

$$\begin{aligned} VC(p^0, p^1, w) =& e(p^1, V(p^1, w)) - e(p^1, V(p^0, w)) \\ =& w - e(p^1, u^0), \end{aligned}$$

donde, por dualidad, $w = e(p^1, V(p^1, w))$, y definimos anteriormente $u^0 = V(p^0, w)$. Así, la variación compensatoria se interpreta como la disminución en el ingreso que un agente que maximiza utilidad requiere para alcanzar nuevamente su nivel de utilidad inicial, pero a los **nuevos precios**. En otras palabras, ¿cuál es el cambio en el ingreso que compensa al agente, en términos de utilidad, tras el cambio en los precios? En caso que la variación compensatoria sea negativa, el valor absoluto de la variación compensatoria es el incremento en el ingreso que el agente requiere para alcanzar su mismo nivel de utilidad.

Esta interpretación es una medida de bienestar más precisa que el cambio en el excedente del consumidor, pues tiene un microfundamento en la teoría de la maximización de utilidad, y en general, de las preferencias. Nos dice que, ante un cambio en los precios, qué tanto ingreso debería quitársele a los consumidores para llevarlos al nivel de utilidad inicial. Mientras que el excedente del consumidor se limita a analizar el cambio en el bienestar que exclusivamente se deriva de un mercado en específico, la variación compensatoria considera el cambio en el bienestar derivado de todos los mercados en su conjunto, considerando efectos sustitución, y el nivel de utilidad de los agentes.

Un ejemplo sencillo, retomemos una función de utilidad Cobb-Douglas, $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$. En las secciones anteriores, habíamos visto que las funciones de demanda Marshalliana (sección 3.2.1), la función de utilidad indirecta (sección 3.7) y la función de gasto (sección 5.4.1) eran:

$$\begin{aligned} x_1(p_1, p_2, w) &= \alpha \frac{w}{p_1} & x_2(p_1, p_2, w) &= \frac{w}{p_2} \\ V(p_1, p_2, w) &= \frac{w}{2\sqrt{p_1 p_2}} & e(p_1, p_2, u) &= u p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] \end{aligned}$$

Para mantener el ejemplo sencillo, asumamos que $\alpha = 1/2$, que los precios iniciales son $p^0 = (1, 1)$, y que el ingreso inicial es $w = 8$. Entonces:

$$\begin{aligned} x_1(p^0, w) &= 4 & x_2(p^0, w) &= 4 \\ V(p^0, w) &= 4 & e(p^0, 5) &= 8. \end{aligned}$$

Notamos inmediatamente que el gasto mínimo es igual al ingreso, lo cual es un resultado del la dualidad entre UMAX y GMIN. Si bien la variación compensatoria permite un análisis para cambios en todos los precios, mantendremos el ejemplo sencillo y asumiremos que los precios finales son $p^1 = (2, 1)$, es decir, sólamente aumenta el precio del bien 1. Entonces:

$$\begin{aligned} x_1(p^1, w) &= 2 & x_2(p^1, w) &= 4 \\ V(p^1, w) &= 2\sqrt{2} & e(p^1, 2\sqrt{2}) &= 8 \end{aligned}$$

Ahora, para la variación compensatoria, no nos interesa el gasto mínimo en el nuevo nivel de utilidad, como calculamos arriba, sino en el nivel de utilidad inicial, $u = 5$:

$$e(p^1, V(p^0, w)) = e(p^1, 5) = 8\sqrt{2}$$

Así, la variación compensatoria es igual a:

$$VC(p^0, p^1, w) = 8 - 8\sqrt{2} = -3.3137$$

Esto quiere decir que si aumentamos el ingreso del individuo en \$4.1421, el individuo comprará una canasta, potencialmente distinta a la original, pero que le brinda un mismo nivel de utilidad que la canasta original a los nuevos precios. Rápidamente:

$$\begin{aligned} x_1(p^1, w - VC(p^0, p^1, w)) =& x_1(p^1, 8\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \\ x_2(p^1, w - VC(p^0, p^1, w)) =& x_2(p^1, 8\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \\ u(2.8284, 5.6569) =& 4 \end{aligned}$$

Se da una representación gráfica en la figura 6.2. En la gráfica a la derecha, se representa el incremento del precio del bien x_1, y las nueva canasta. A estos nuevos precios, existe un un nivel de ingreso $w - VC(p^0, p^1, w)$ que permite al consumidor alcanzar el mismo nivel de utilidad que en el período inicial. Esto es, que compensa al consumidor en términos de utilidad. En la gráfica a la derecha, la variación compensatoria se representa como el negativo del incremento en el ingreso requerido para alcanzar este nuevo nivel de ingreso.

Tras la variación compensatoria, el consumidor adquiere la canasta

$$x(p^1, w - VC(p^0, p^1, w)),$$

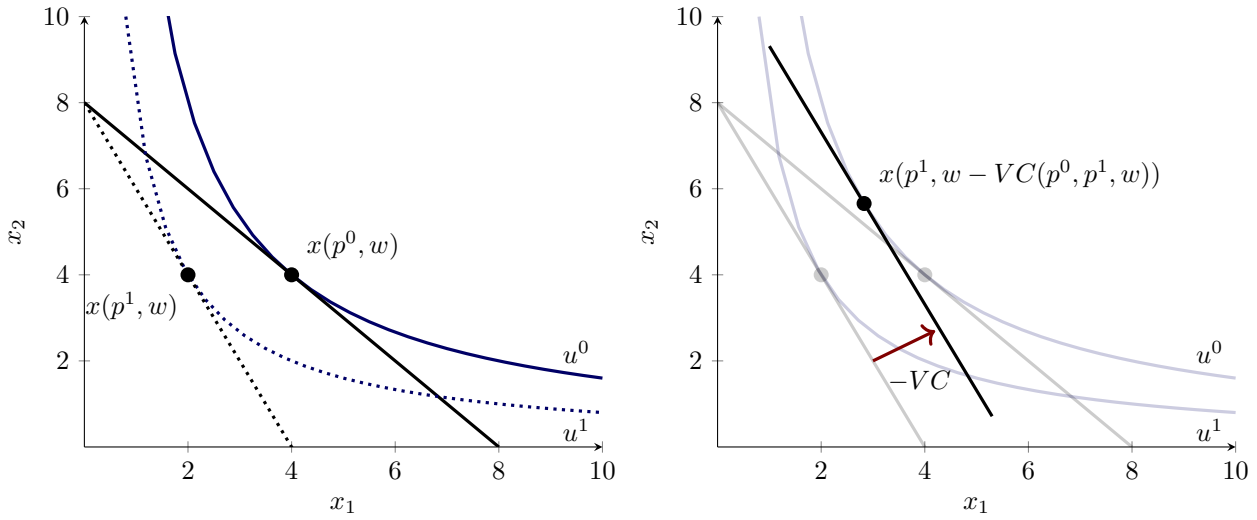


Figure 6.2: Variación compensatoria en un mapa de preferencias

y recibe un nivel de utilidad

$$V(p^1, w - VC(p^0, p1, w)) = u(x(p^1, w - VC(p^0, p^1, w))) = V(p^0, w).$$

Donde la última igualdad viene de que, por definición, esta canasta le permite alcanzar el nivel de utilidad inicial. De lo anterior, que la variación compensatoria también pueda ser definida implícitamente por la función

$$V(p^1, w - VC(p^0, p^1, w)) = V(p^0, w).$$

Regresando al ejemplo anterior, podemos encontrar la variación compensatoria utilizando la fórmula implícita anterior. Definiendo $p_1^0 = 1$, $p_2^0 = 1$, $p_1^1 = 2$, $p_2^1 = 1$, y nuevamente con $w = 8$, tenemos que:

$$V(p^1, w - VC(p^0, p^1, w)) = \frac{w - VC(p^0, p^1, w)}{2\sqrt{p_1^1 p_2^1}} = \frac{8 - VC(p^0, p^1, w)}{2\sqrt{2}}$$
$$V(p^0, w) = \frac{w}{2\sqrt{p_1^0 p_2^0}} = \frac{8}{2\sqrt{1}} = 4$$

Igualando ambos términos y despejando $VC(p^0, p^1, w)$, tenemos que:

$$VC(p^0, p^1, w) = 8 - 2\sqrt{2}V(p^0, w) = 8 - 8\sqrt{2} = -3.3137,$$

exactamente el mismo resultado que el que obtubimos anteriormente.

Esta definición aplica de manera muy general para cualquier nivel de precios iniciales y finales, manteniendo el ingreso constante (o normalizando los precios para que nominalmente sea el mismo ingreso). Para facilitar el ejemplo, consideramos el cambio en un sólo precio, y no en todos los precios, pero las definiciones siguen siendo válidas.

Una interpretación interesante surge cuando consideramos el cambio en el precio de un solo bien. De manera general, consideremos el cambio en el precio para determinado bien l. Consideremos que el precio de este bien cambia de p_l^0 a p_l^1, y que los demás precios, $p_{\neg l}$, se mantienen constantes. Por definición de la variación compensatoria, y abusando en la notación, tenemos que:

$$VC(p^0, p^1, w) = w - e(p_l^1, p_{\neg l}, u^0).$$

Por dualidad, también sabemos que el gasto mínimo para alcanzar la utilidad inicial a los precios iniciales es igual al ingreso:

$$w = e(p_l^0, p_{\neg l}, u^0).$$

Sustituyendo:

$$VC(p^0, p^1, w) = e(p_l^0, p_{\neg l}, u^0) - e(p_l^1, p_{\neg l}, u^0).$$

Y por el Lema de Hotteling:

$$\frac{\partial e(p_l, p_{\neg l}, u)}{\partial p_l} = h_l(p_l, p_{\neg l}, u) \qquad \Longrightarrow \qquad \int h_l(p_l, p_{\neg l}, u) dp_l = e(p_l, p_{\neg l}, u) + k,$$

donde k es la constante de integración. Si convertimos la integral anterior en una integral definida, y evaluamos en los precios iniciales y finales, tenemos que:

$$\int_{p_l^1}^{p_l^0} h_l(p_l, p_{\neg l}, u^0) dp_l = e(p_l^0, p_{\neg l}, u^0) - e(p_l^1, p_{\neg l}, u^0) = VC(p_l^0, p_{\neg l}, w).$$

Este es un gran resultado, pues permite interpretar la variación compensatoria como un área debajo de la curva de demanda, con dos particularidades. Primero, como los economistas graficamos la demanda al revés, gráficamente es el área a la izquierda de la curva de demanda. Segundo, en vez de ser el área debajo de la curva de demanda marshalliana (como es en el caso de la variación en el excedente del consumidor), es debajo de la curva de demanda Hicksiana, cuando el nivel de utilidad es igual a la utilidad inicial. Esta representación gráfica se muestra en la figura 6.3, para la demanda Hicksiana del bien x_1. que vimos en el ejemplo anterior. El negativo en la variación compensatoria se debe a que el orden de integración va de un numero mayor a uno menor, por lo que es el negativo del área sombreada.

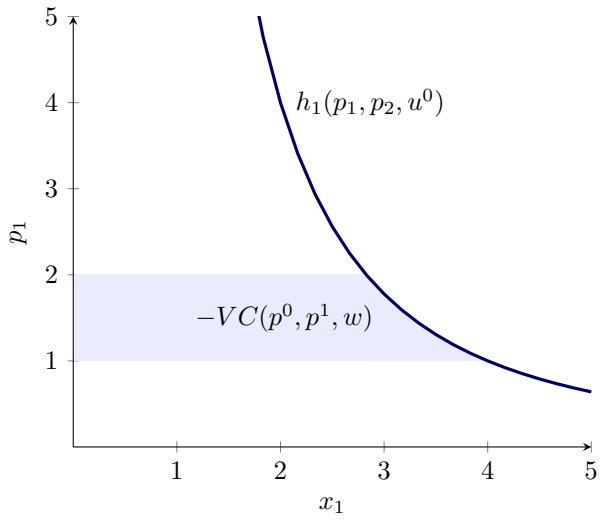


Figure 6.3: Variación compensatoria y la demanda compensada.

Siguiendo con el ejemplo anterior, y usando la demanda hicksiana que ya habíamos obtenido en las sección 5.1.1, tenemos que la demanda Hicksiana para el bien x_1, cuando $\alpha = 0.5$, manteniendo constante el precio del bien x_2, y la utilidad inicial $u^0 = 4$, es:

$$h_1(p_1, p_2, u) = u \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_2}{p_1} \right)^{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad h_1(p_1, 1, 4) = \frac{4}{\sqrt{p_1}}.$$

Integrando entre los precios iniciales y finales, tenemos que:

$$\int_2^1 \frac{4}{\sqrt{p_1}} dp_1 = 8\sqrt{p_1}\Big|_2^1 = 8 - 8\sqrt{2} = -3.3137 = VC(p^0, p^1, w).$$

6.1.2 Variación equivalente a la Hicks

Seguiremos una estructura similar a la subsección anterior. Empecemos con la definición de variación equivalente:

$$\begin{aligned} VE(p^0, p^1, w) =& e(p^0, V(p^1, w)) - e(p^0, V(p^0, w)) \\ =& e(p^0, u^1) - w, \end{aligned}$$

donde, por dualidad, $w = e(p^0, V(p^0, w))$, y definimos anteriormente $u^1 = V(p^1, w)$. Por lo tanto, la variación equivalente se interpreta como el incremento en el ingreso que requiere un agente que maximiza utilidad y se enfrenta a los precios iniciales, para llevarlo a un nivel de utilidad igual al que alcanzó tras el cambio en los precios. En otras palabras, ¿qué cambio en el ingreso equivale, en términos de utilidad, al cambio en los precios?

Al igual que la variación compensatoria, la variación equivalente es una medida de cambio en el bienestar más precisa, pues le pone un costo monetario al cambio en los precios, que considera la sustitución que hace el agente entre todos los bienes, y no únicamente lo que sucede en un mercado.

Retomemos el ejemplo de la función de utilidad Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned} x_1(p_1, p_2, w) &= \alpha \frac{w}{p_1} & x_2(p_1, p_2, w) &= \frac{w}{p_2} \\ V(p_1, p_2, w) &= \frac{w}{2\sqrt{p_1 p_2}} & e(p_1, p_2, u) &= u p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] \end{aligned}$$

y nuevamente, asumamos que $\alpha = 0.5$, que los precios iniciales son $p^0 = (1, 1)$, y que el ingreso inicial es $w = 8$. Entonces:

$$\begin{aligned} x_1(p^0, w) &= 4 & x_2(p^0, w) &= 4 \\ V(p^0, w) &= 4 & e(p^0, 5) &= 8 \end{aligned}$$

Nuevamente, spongammos que los precios finales son $p^1 = (2, 1)$, es decir, sólamente aumenta el precio del bien 1. Entonces:

$$\begin{aligned} x_1(p^1, w) &= 2 & x_2(p^1, w) &= 4 \\ V(p^1, w) &= 2\sqrt{2} & e(p^1, 2.8284) &= 8 \end{aligned}$$

Para la variación equivalente nos interesa el gasto mínimo en el nuevo nivel de utilidad, $u = 2\sqrt{2}$, pero manteniendo los precios iniciales:

$$e(p^0, V(p^1, w)) = e(p^0, 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

Utilizando la definición de variación equivalente, ésta es igual a

$$VE(p^0, p^1, w) = 4\sqrt{2} - 8 = -2.3431$$

Esto quiere decir que cambiar los precios de p^0 a p^1 equivale a mantener los precios en p^0, pero disminuir el ingreso del consumidor en \$2.3431. Rápidamente:

$$\begin{aligned} x_1(p^0, w + VE(p^0, p^1, w)) =& x_1(p^0, 8 - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \\ x_2(p^0, w + VE(p^0, p^1, w)) =& x_2(p^0, 8 - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \\ u(2.8284, 2.8284) =& 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

El que los números hayan salido parecidos a la variación compensatoria es particularidad de las funciones de utilidad Cobb-Douglas. En general, para otras formas funcionales, esto no será necesariamente el caso. Una representación gráfica se da en la figura 6.4. En la gráfica a la derecha, se representa el incremento del precio, junto con los niveles de utilidad inicial y finales. En la gráfica de la derecha se muestra cómo alcanzar el mismo nivel de utilidad final, pero manteniendo constantes los precios iniciales.

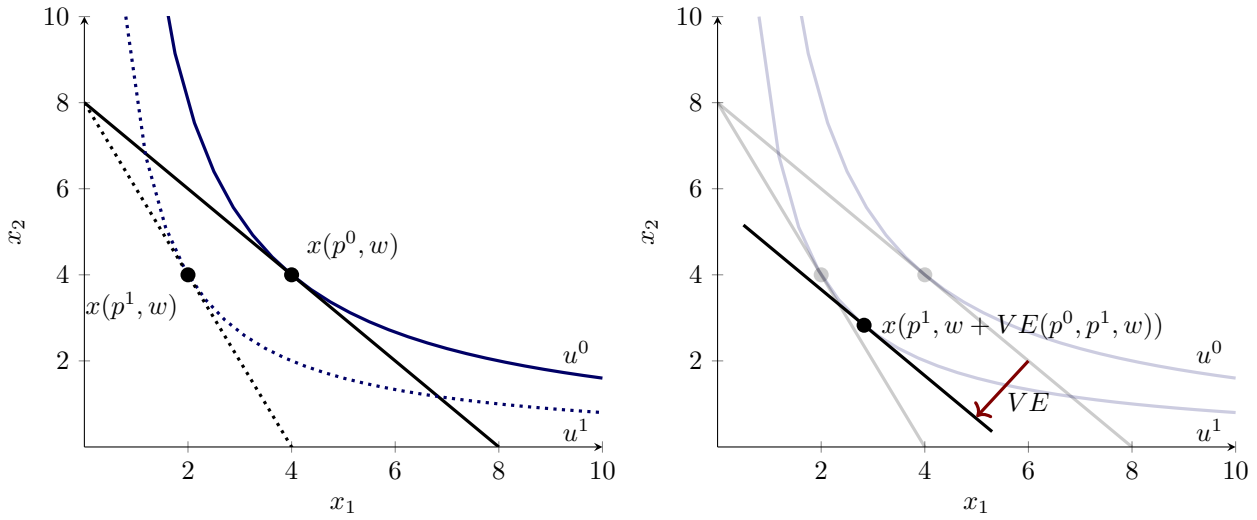


Figure 6.4: Variación equivalente en un mapa de preferencias

Con la variación equivalente en vez del cambio en precios, el consumidor adquiere la canasta

$$x(p^0, w + VE(p^0, p^1, w)),$$

y recibe un nivel de utilidad

$$V(p^0, w + VE(p^0, p^1, w)) = u(x(p^0, w + VE(p^0, p^1, w))) = V(p^1, w).$$

Donde la última igualdad viene de que, por definición, esta canasta le permite alcanzar el nivel de utilidad final. De lo anterior, que la variación equivalente también pueda ser definida implícitamente por la función

$$V(p^0, w + VE(p^0, p^1, w)) = V(p^1, w).$$

Regresando al ejemplo de la función Cobb-Douglas, podemos encontrar la variación equivalente utilizando este método. Definiendo $p_1^0 = 1$, $p_2^0 = 1$, $p_1^1 = 2$, $p_2^1 = 1$, y nuevamente con $w = 8$, tenemos que:

$$\begin{aligned} V(p^0, w + VE(p^0, p^1, w)) =& \frac{w + VE(p^0, p^1, w)}{2\sqrt{p_1^0 p_2^0}} = \frac{8 + VE(p^0, p^1, w)}{2\sqrt{1}} \\ V(p^1, w) =& \frac{w}{2\sqrt{p_1^1 p_2^1}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Igualand y despejando $VE(p^0, p^1, w)$, tenemos que:

$$VE(p^0, p^1, w) = 4\sqrt{2} - 8 = -2.3431,$$

exactamente el mismo resultado que obtuvimos anteriormente.

Al igual que la variación compensatoria, las dos definiciones anteriores aplican para cualquier cambio en los precios, pudiendo cambiar uno o varios, pero manteniendo el ingreso constante. Consideramos el cambio en un sólo precio sólo para facilitar el ejemplo.

Igualmente, podemos considerar un cambio en el precio de un sólo bien. De manera general, consideremos el cambio en el precio para determinado bien l. Consideremos que el precio de este bien cambia de p_l^0 a p_l^1, y que los demás precios, $p_{\neg l}$, se mantienen constantes. Por definición de la variación equivalente, y abusando en la notación, tenemos que:

$$VE(p^0, p^1, w) = e(p_l^0, p_{\neg l}, u^1) - w.$$

Por dualidad,

$$w = e(p_l^1, p_{\neg l}, u^1).$$

Sustituyendo,

$$VE(p^0, p^1, w) = e(p_l^0, p_{\neg l}, u^1) - e(p^1, p_{\neg l}, u^1).$$

Por el Lema de Hotteling:

$$\frac{\partial e(p_l, p_{\neg l}, u)}{\partial p_l} = h_l(p_l, p_{\neg l}, u) \qquad \Longrightarrow \qquad \int h_l(p_l, p_{\neg l}, u) dp_l = e(p_l, p_{\neg l}, u) + k,$$

donde k es la constante de integración. Convirtiendo a una integral definida y evaluando en los precios iniciales y finales, tenemos que:

$$\int_{p_l^1}^{p_l^0} h_l(p_l, p_{\neg l}, u^1) dp_l = e(p_l^0, p_{\neg l}, u^1) - e(p_l^1, p_{\neg l}, u^1) = VE(p_l^0, p_{\neg l}, w).$$

Al igual que para la variación compensatoria, la variación equivalente puede interpretarse como el área debajo de la curva de la demanda hicksiana, pero ahora cuando el nivel de utilidad es igual a la utilidad final. Esta representación gráfica se muestra en la figura 6.5, para la demanda Hicksiana del bien x_1, que vimos en el ejemplo. Nuevamente, el negativo en la variación equivalente se debe a que el orden de integración va de un numero mayor a uno menor, por lo que es el negativo del área sombreada.

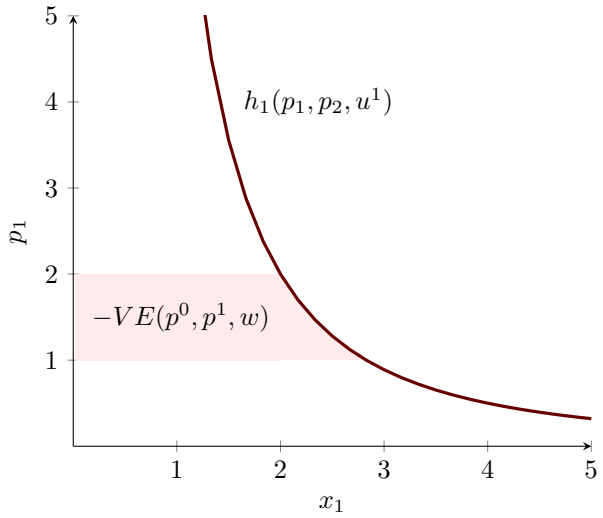


Figure 6.5: Variación equivalente y la demanda compensada.

Siguiendo otra vez con el ejemplo anterior, y usando la demanda hicksiana que ya habíamos obtenido en las sección 5.1.1, tenemos que la demanda Hicksiana para el bien x_1, cuando $\alpha = 0.5$, manteniendo constante el precio del bien x_2, y la utilidad final $u^1 = 2\sqrt{2}$, es:

$$h_1(p_1, p_2, u) = u\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_2}{p_1}\right)^{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad h_1(p_1, 1, 2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p_1}}.$$

Integrando entre los precios iniciales y finales, tenemos que:

$$\int_2^1 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p_1}} dp_1 = 4\sqrt{2p_1}\Big|_2^1 = 4\sqrt{2} - 8 = -2.3431 = VE(p^0, p^1, w).$$

6.2 Relación entre VC y EC

La variación compensatoria y la variación equivalente son dos medidas de cambio en el bienestar, y no son necesariamente iguales entre ambas. Una mide cómo podemos compensar al consumidor por el cambio en precios, y la otra mide qué cambio en el ingreso es equivalente al cambio en precios, todo en términos de utilidad. Primero, cabe

señalar que la variación compensatoria y la variación equivalente tienen siempre el mismo signo, pues recordemos que para ambas, partimos de una comparación en los niveles de utilidad.

Cabe preguntarse entonces cuál de estas dos variaciones es más grande en magnitud. En general, para cambios en dos o más precios, la respuesta es ambigua y dependerá de las relaciones entre todos ellos. No obstante, cuando únicamente cambia el precio de un bien, la respuesta es más sencilla y depende de dos factores:

1. Si el bien cuyo precio cambia es un bien normal, inferior o neutro al ingreso.
2. Si se trata de un aumento o de un cambio en el precio.

El segundo caso es un poco más trivial. Es fácil ver de las gráficas 6.2 a 6.5. Grafiquemos primero las funciones de demanda hicksianas para el bien x_1 para ambos niveles de utilidad. Por facilidad de notación, definamos $h_1^0 = h_1(p_1, p_2, u^0)$ la función de demanda hicksiana para x_1 para el nivel de utilidad inicial, y $h_1^1 = h_1(p_1, p_2, u^1)$ para el nivel de utilidad final.

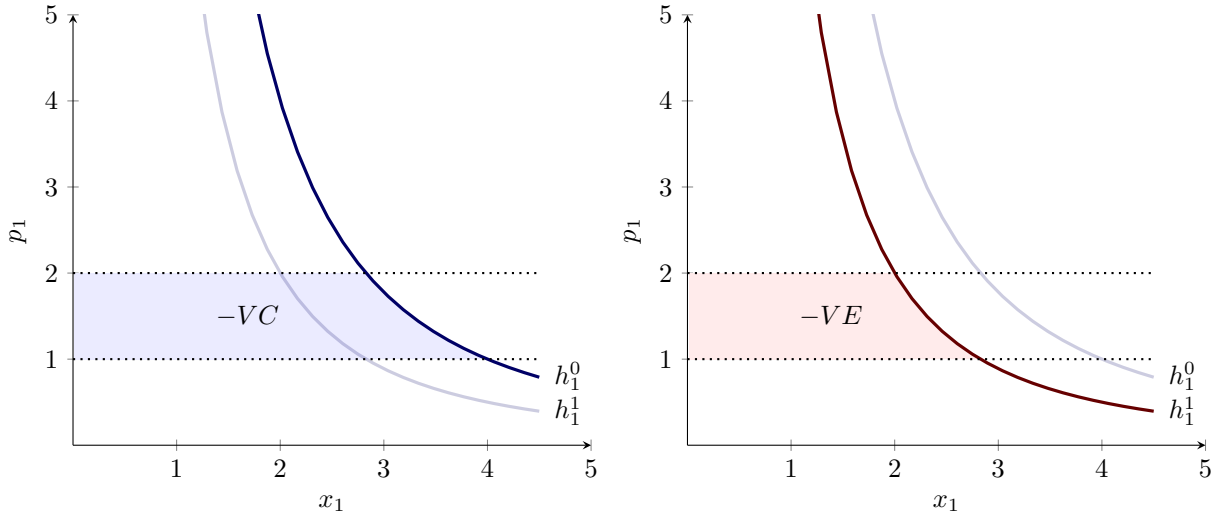


Figure 6.6: Variación equivalente y la demanda compensada.

Comparando las áreas debajo de las respectivas curvas de demanda hicksiana en la figura 6.6, entre el mismo rango de precios, es claro que $\mid VC \mid > \mid VE \mid$. Así, para este ejemplo en donde el bien x_1 es normal y su precio aumenta, la variación compensatoria es mayor a la variación equivalente, en valor absoluto. ¿Qué pasa si el precio, en lugar de aumentar, dismunye de \$2 a \$1? De las gráficas 6.2 y 6.4 es posible ver que los niveles de utilidad inicial y final intercambian posiciones; esto es, la utilidad inicial sería u^1, y la final sería u^0.

Esto ocasiona que las demandas hicksianas intercambien de lugar en la figura 6.6. Esto lo vemos en la figura 6.7, en donde la Variación compensatoria ahora se mide respecto de la demanda hicksiana más cercana al origen.

Una pregunta válida, entonces, es: ante un incremento en el precio, ¿qué determina que la demanda hicksiana con utilidad inicial u^0 (esto es, h_1^0) se encuentre más lejos del origen que la demanda hicksiana con utilidad final u^1 (esto es, h_1^1)? El determinante es la relación entre la demanda marshaliana y el ingreso, esto es, si el bien es un bien normal, inferior o neutro al ingreso.

Consideremos como ejemplo un aumento en el precio del bien x_1, de p_1^0 a p_1^1, y que el precio del bien x_2 se mantiene constante. Primero, con el efecto sustitución, nos mantenemos sobre u^0, y por la ley de la demanda compensada, disminuimos el consumo del bien x_1. Posteriormente, el efecto ingreso nos mueve del nivel de utilidad inicial u^0 al nivel de utilidad final u^1. En este momento, lo interesante es compara las demandas hicksianas

$$h_1(p_1^1, p_2, u^0) \qquad \text{y} \qquad h_1(p_1^1, p_2, u^1).$$

Es decir, para el mismo nivel de precios, si la demanda del bien es mayor para una utilidad inicial que para

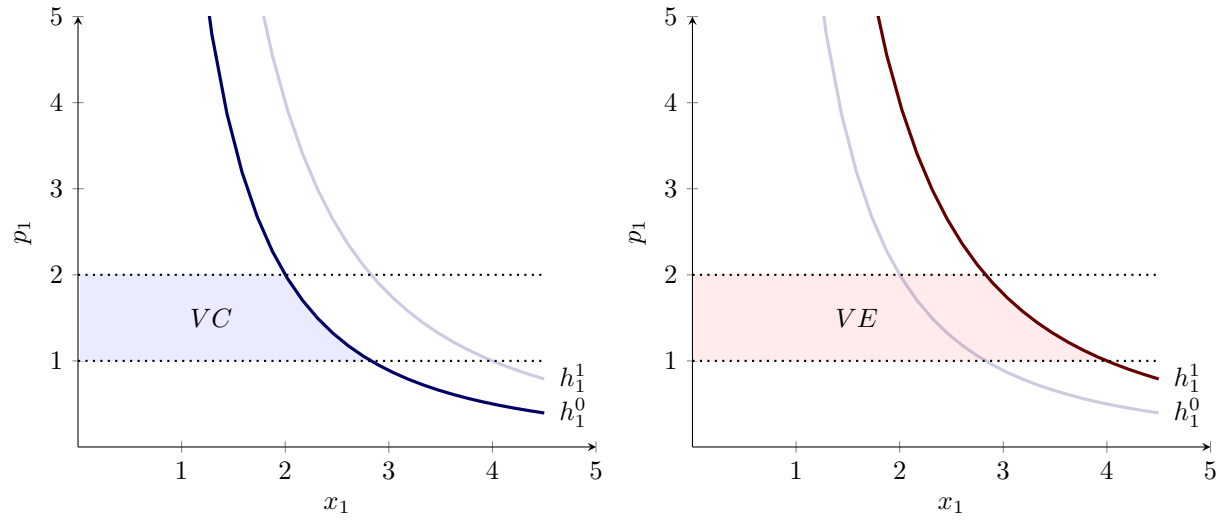


Figure 6.7: Variación equivalente y la demanda compensada.

una utilidad final. En la sección 5.2.2 dijimos que los bienes normales en el ingreso son normales en la utilidad y viceversa; lo mismo va para bienes inferiores y neutros. Así, ante una disminución en la utilidad:

- Si el bien es normal en el ingreso, la demanda hicksiana disminuye. Esto es, h_1^1 va a estar más cerca del origen que h_1^0.
- Si el bien es inferior en el ingreso, la demanda hicksiana aumenta. Esto es, h_1^1 va a estar más lejos del origen que h_1^0.
- Si el bien es neutro en el ingreso, la demanda hicksiana no cambia. Esto es, $h_1^1 = h_1^0$. Regresaremos a este caso más adelante.

La intuición es sencilla. Los bienes inferiores se consumen más cuando el individuo está peor, y menos cuando está mejor (en términos de ingreso y, consecuentemente, en términos de utilidad). Por lo tanto, ante un aumento en precios, un individuo que está peor, $u^1 < u^0$, va a consumir más del bien cuyo precio aumentó.

Se deja a los lectores dar un ejemplo gráfico. Para un bien inferior y un aumento en el precio, la gráfica debe mostrar que el efecto sustitución es negativo, y el efecto ingreso es positivo. Por lo tanto, la demanda hicksiana con la utilidad final estará más lejos del origen que la demanda hicksiana con la utilidad inicial.

Entonces, de manera general, podemos decir que, ante aumentos en el precio $\uparrow p_l$, y decrementos en el precio $\downarrow p_l$, y para las respectivas relaciones de la demanda marshalliana con el ingreso:

	Bien normal	**Bien neutro**	**Bien inferior**
$\uparrow p_l$	$\lvert VC\rvert > \lvert VE\rvert$	$\lvert VC\rvert = \lvert VE\rvert$	$\lvert VC\rvert < \lvert VE\rvert$
$\downarrow p_l$	$\lvert VC\rvert < \lvert VE\rvert$	$\lvert VC\rvert = \lvert VE\rvert$	$\lvert VC\rvert > \lvert VE\rvert$

6.3 Relación de VC y VE con el excedente del consumidor

Hasta ahora, vimos que la VC y la VE pueden ser interpretadas como el área debajo de la curva de demanda hicksiana, pero para diferentes niveles de utilidad. Asimismo, cuando vimos el tema de dualidad, vimos que:

$$h_1(p^0, u^0) = x_1(p^0, w) \qquad \text{y} \qquad h_1(p^1, u^1) = x_1(p^1, w).$$

donde $u^0 = V(p^0, w)$ y $u^1 = V(p^1, w)$. Esto quiere decir que la demanda marshalliana tiene que intersectar a la curva de demanda hicksiana cuando el nivel de utilidad es u^0 y los precios son p^0, y tiene que intersectar a la curva de demanda hicksiana cuando el nivel de utilidad es u^1 y los precios son p^1.

Siguiendo con el ejemplo anterior, tenemos una función de demanda marshalliana y una función de demanda hicksiana:

$$x_1(p_1, p_2, w) = \alpha \frac{w}{p_1} \qquad h_1(p_1, p_2, u) = u \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_2}{p_1} \right)^{\alpha}.$$

Manteniendo el precio del bien x_2 constante $p_2 = 1$, y con $\alpha = 0.5$, tenemos un nivel inicial de utilidad $u^0 = 4$, y un nivel final de utilidad $u^1 = 2\sqrt{2}$.

$$x_1(1, 1, 8) = 4 = h(1, 1, 4) \equiv x_1^0$$
$$x_1(2, 1, 8) = 2 = h(2, 1, 2\sqrt{2}) \equiv x_1^1$$

Denotamos x_1 la función de demanda marshaliana, h_1^0 la función de demanda hicksiana para el nivel de utilidad inicial, y h_1^1 la función de demanda hicksiana para el nivel de utilidad final. Esto lo representamos gráficamente en la figura 6.8.

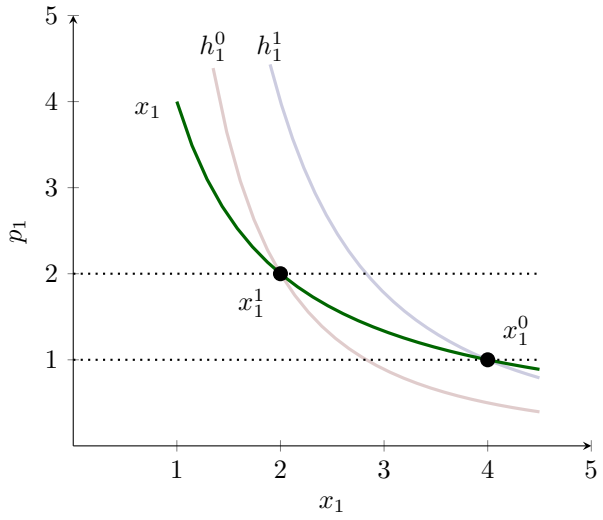


Figure 6.8: Demanda Marshaliana y Demanda Hicksiana

Notarán que, como anticipamos en la sección 5.5, como x_1 es un bien normal al ingreso, la demanda marshaliana es más elástica (una pendiente mayor, aunque gráficamente menor pues graficamos al revés) que la demanda hicksiana.

Variación en el excedente del consumidor
Para un bien l, cuyo precio es el único que cambia de p_l^0 a p_l^1, definimos la variación en el excedente del consumidor como:

$$VEC(p^0, p^1, w) = \int_{p_l^1}^{p_l^0} x_l(p_l, p_{\neg l}, w) dp_l.$$

Esta tiene una interpretación del área debajo de la curva de demanda marshaliana. Un tema que salta a la vista de la gráfica 6.8 es que el área de la variación en el excedente del consumidor está entre las áreas de la variación compensatoria y la variación equivalente. Esto se ilustra de mejor manera en la figura 6.9. En general, se tiene que dar alguno de los siguientes casos necesariamente:

- O la variación compensatoria es mayor a la variación en el excedente del consumidor, y ésta a la variación equivalente: $|VC| > |VEC| > |VE|$,

- O la variación equivalente es mayor a la variación en el excedente del consumidor, y ésta a la variación compensatoria: $|VE| > |VEC| > |VC|$,
- O todas son iguales: $|VEC| = |VC| = |VE|$.

Particularmente, para cambios pequeños en los precios, la diferencia entre las medidas de bienestar es pequeña, por lo que la variación en el excedente del consumidor es una buena aproximación de la variación compensatoria y de la variación equivalente. Esto es particularmente cierto para cambios pequeños en los precios de productos cuyo consumo representa una proporción pequeña en el ingreso. No obstante, esta aproximación se rompe para variaciones grandes en los precios de bienes o servicios que representan un gasto importante de los consumidores, como puede ser la vivienda.

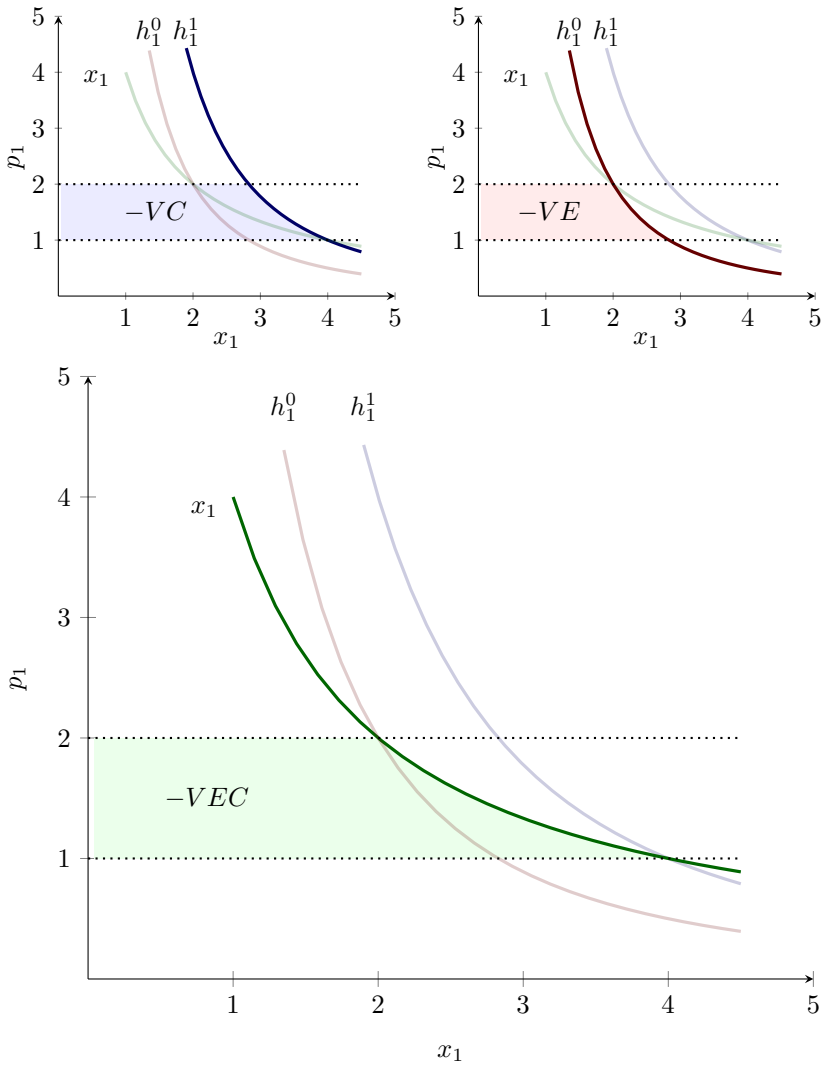


Figure 6.9: Relación entre VC, VE y VEC.

6.3.1 Bienes neutros al ingreso

Un caso particularmente interesante es el de los bienes neutros al ingreso. Asumamos que un agente tiene preferencias tal que la funcion de utilidad $u(x)$ es localmente no saciable, continua y estríctamente cuasicóncava. Fijemos nuevamente el nivel de utilidad de un agente en u, y denotemos $e(p, u)$ el gasto mínimo necesario para que el agente alcance el nivel de utilidad u con los precios p. Fijemso el nivel del ingreso del agente en $w = e(p, u)$. Por dualidad,

$x(p, e(p, u)) = h(p, u)$. De aquí, derivamos la ecuación de Slutsky. En particular, para el caso de un solo bien y el efecto directo de un cambio en el precio:

$$\frac{\partial x_l}{\partial p_l} = \frac{\partial h_l}{\partial p_l} - \frac{\partial x_l}{\partial w} x_l =$$

En el caso de unn bien neutro al ingreso, $\frac{\partial x_l}{\partial w} = 0$, por lo que:

$$\frac{\partial x_l}{\partial p_l} = \frac{\partial h_l}{\partial p_l}.$$

Pensemos detenidamente en la ecuació anterior, así como el hecho de que partimos de $x(p, w) = h(p, u)$ para $w = e(p, u)$. Esto nos dice que, para un bien neutro al ingreso, la cantidad demandada es la misma para la demanda marshalliana que para la demanda hicksiana; más aún, ambas demandas tienen la misma pendiente. Esto nos indica que la demanda marshalliana es igual a la demanda hicksiana. Otra forma de relacionar esto es recordar que en la sección 5.2.2 habíamos anticipado (aunque no lo demostramos) que la demanda marshalliana es neutra al ingreso sí y sólo sí la demanda hicksiana es neutra al nivel de utilidad u. Así, si el bien k es neutro al ingreso y, por tanto, a la utilidad, utilizando el teorema de dualidad podemos reescribir la relación entre las demandas hicksianas y marshallianas como $\tilde{x}_k(p) = \tilde{h}_k(p)$. Este resultado nos indica nuevamente que la demanda marshalliana es igual a la demanda hicksiana para un bien neutro al ingreso.

Para ejemplificar, consideremos la función de utilidad $u(x_0, x) = x_0 + g(x)$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$ es un vector de bienes, x_0 es el bien lineal, y $g(x)$ es una función estríctamente creciente y cóncava. Normalicemos los precios tal que el precio del bien lineal sea $p_0 = 1$, mientras que los demás precios los denotamos como $p = (p_1, p_2, \ldots, p_L)$.

Si planteamos el problema de maximización de utilidad enfocándonos únicamente en la solución interior ($x_l > 0$ para toda $l = 0, 1, 2, \ldots, L$), nuestras condiciones de primer orden de Kuhn-Tuker nos indican que:

$$\lambda^{UMAX} = 1 \tag{6.1}$$

$$g_l(x) = \lambda^{UMAX} p_l = p_l \qquad \forall l = 1, 2, \ldots, L. \tag{6.2}$$

$$x_0 = w - \sum_{l=1}^{L} p_l x_l. \tag{6.3}$$

donde $g_l(x)$ es la derivada parcial de $g(x)$ respecto al bien l. Estas condiciones de primer orden caracterizan la función de demanda marshalliana. El sistema cuenta con $L + 2$ ecuaciones y $L + 2$ incógnitas, una ecuación para el bien numerario x_0, una ecuación para cada uno de los L bienes restantes, y una ecuación para λ. Notemmos que $\lambda^{UMAX} = 1$, algo que es caracteristico de las funciones de utilidad cuasilineal (cuando normalizamos el precio del bien lineal a 1). Recordemos del teorema de la envolvente que λ^{UMAX} es el cambio en la utilidad ante cambios en el ingreso, es decir, la utilidad marginal del dinero. Así, $\lambda^{UMAX} = 1$ nos dice que la utilidad marginal del dinero es constante. Regresaremos a la intuición de esto.

Notemos algo más de las condiciones de primer orden. En particular, fijemos la atención al sistema dado por las ecuaciones dentro de 6.2. Este sistema cuenta con L ecuaciones y L incógnitas, por lo que tiene una solución independientemente de los valores de λ y de x_0. Más aún, el sistema depende únicamente de los precios p, ya que en ese subsistema no aparece el ingreso en ningún lado. De aquí que en la solución interior, el consumo de los bienes no lineales no dependa del ingreso. Así, partiendo de la solución innterior, cualquier incremento en el ingreso se traduce directamente en un incremento en el consumo del bien lineal. Notamos que si incrementamos el ingreso en Δ, entonces el consumo del bien lineal se incrementa en Δ, y por lo tanto, el incremento en la utilidad es Δ. Por tal motivo, la utilidad marginal del dinero es constante.

Pasemos ahora al problema de minimización del gasto. Nuevamente, nos enfocaremos únicamente en la solución interior. Las condiciones de primer orden de Kuhn-Tuker nos indican que:

$$\lambda^{GMIN} = 1 \tag{6.4}$$

$$g_l(x) = \lambda^{GMIN} p_l = p_l \qquad \forall l = 1, 2, \ldots, L. \tag{6.5}$$

$$u = u(x_0, x). \tag{6.6}$$

Nuevamente, el sistema cuenta con $L+2$ ecuaciones y $L+2$ incógnitas, una ecuación para el bien numerario x_0, una ecuación para cada uno de los L bienes restantes, y una ecuación para λ^{GMIN}. Una vez más, notamos que $\lambda^{GMIN} = 1$, por lo que el gasto mínimo marginal ante cambios en la utilidad es constante. Más interesante es, nuevamente el subsistema de ecuaciones dado por 6.5. Este sistema cuenta con L ecuaciones y L incógnitas, y es completamente indepenndiente de u, por lo que las demandas hicksianas son independientes del nivel de utilidad. Más aún, el sistema 6.2 y el sistema 6.5 son idénticos, por lo que, en la solución interior, las demandas marshallianas y hicksianas deben de ser idénticas para los bines no lineales.

Para el ejemplo gráfico en las Figuras 6.11 y 6.10, consideremos la función de utilidad $u(x_0, x_1) = x_0 + \sqrt{2x_1}$, para un nivel de ingreso $w = 6$, un precio del bien x_0 de $p_0 = 1$, y un precio del bien x_1 de $p_1^0 = 0.25$ que incrementa a 0.5. Dejamos al lector identificar el efecto sustitución y el efecto ingreso, y verificar que el efecto ingreso no altera el consumo del bien x_1 cuando incrementa su precio.

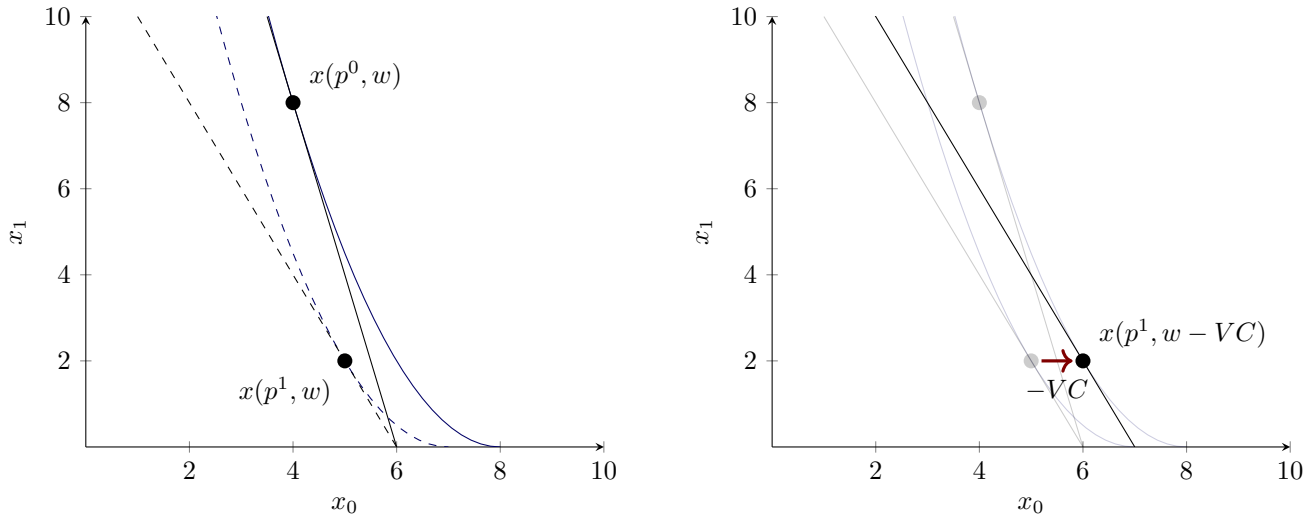


Figure 6.10: Variación compensatoria ante cambios en el precio del bien no lineal.

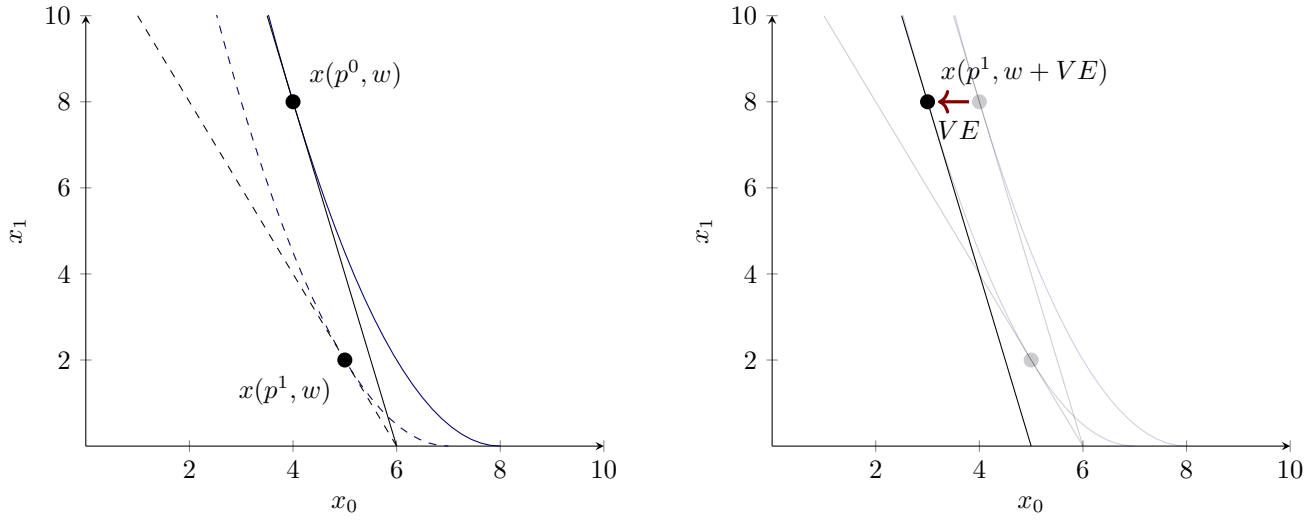


Figure 6.11: Variación compensatoria ante cambios en el precio del bien no lineal.

Enfoquémonos mejor en la representación gráfica de las variaciones compensatorias y equivalentes. Notemos que las flechas que representan $-VC$ y VE son de igual magnitud, aunque apunten en direcciones contrarias. Esto es, $|VC| = |VE|$. Esto es cierto para cualquier incremento en los precios de los bienes no lineales. Y dado que la variación absoluta en el excedente del consumidor está entre la variación compensatoria en valor absoluto, y la variación compensatoria en valor absoluto, $|VEC| = |VC| = |VE|$.

Si regresamos a las gráficas 6.9, y recordamos que la demanda marshalliana es igual a la demanda hicksiana para un bien neutro al ingreso, en solución interior, notamos que el área debajo de las correspondientes funciones de demanda deben de ser iguales.

6.4 El problema de integrabilidad

Hasta ahora hemos asumido que los agentes tienen una relación de preferencias completas, transitivas y continuas, tal que existe una función de utilidad que las representa, esto es, $x \succeq y$ si y sólo si $u(x) \geq u(y)$. Si esto es así, la canasta óptima para el agente es aquella que maximiza su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria. A esto es a lo que nos referimos cuando hablamos de un agente "racional". El uso de esta palabra es un poco desafortunado, puesto que es un término que se asocia a un juicio de valor. En este contexto, sin embargo, nos referimos a un agente racional como aquel que elije la canasta que maximiza su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria.

Impongamos además que las preferencias son localmente no saciables y estrictamente cuasicóncavas, para tener una función de demanda bien definida. Así, de UMAX, obtenemos un sistema de funciones de demanda que satisface:

- Homogeneidad de grado cero en los precios y en el ingreso (no ilusión del dinero): $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$ para todo $\alpha > 0$.
- Ley de Walrás: $p \cdot x(p, w) = w$.
- La matriz de sustitución de Slutsky $S(p, w)$ es simétrica, negativa semidefinida, y satisface $S(p, w)p = 0$ para toda $(p, w) \gg 0$.

Vale la pena preguntarse si esta es una condición del tipo si y sólo si. Esto es, si el sistema de funciones de demanda $x(p, w)$ satisface las tres condiciones anteriores, **¿podemos encontrar preferencias que racionalicen este sistema?** Esto es, podemos encontrar una relación de preferencias $\succeq$ tal que para toda (p, w), $x(p, w) \succeq \tilde{x}$ para toda $\tilde{x} \in B(p, w)$. En otras palabras, si las funciones de demanda satisfacen las tres condiciones anteriores, **¿podemos encontrar una función de utilidad** $u(x)$ **tal que** $x(p, w)$ **sea la solución al problema de maximización de** $u(x)$ **sujeto a** $p \cdot x \leq w$**?**

La principal importancia de esta pregunta radica, en mi opinión, en que esta pregunta es esencial para poder realizar un adecuado análisis del bienestar. De aquí que haya decidido incluir esta sección en el capítulo de análisis del bienestar.

En principio, las funciones de demanda son observables; mejor dicho, son estimables, aunque las dificultades asociadas a la estimación de sistemas de demanda son tema de un curso completamente distinto. La estimación que hagamos del sistema de funciones de demanda podríamos realizarla

- A partir de un modelo paramétrico que imponga ciertas restricciones sobre los parámetros para que las funciones de demanda satisfagan las tres condiciones anteriores. Lo anterior, para asegurarnos que nuestra estimación satisfaga las conclusiones del modelo neoclásico que hasta ahora hemos construido.
- A partir de un modelo no paramétrico que no imponga las restricciones anteriores. Esto, para realizar pruebas estadísticas sobre si los agentes económicos se comportan de manera racional, es decir, maximizan su utilidad.

Si de lo anterior podemos concluir que los agentes se comportan de manera racional, y podemos estimar una función de utilidad, ésta nos permitiría realizar un análisis del bienestar más robusto que la mera estimación del excedente del consumidor.

La pregunta tiene una segunda importancia, aunque esta vez, teórica. Y esto es que si el sistema de demanda que satisfaga las tres condiciones señaladas, entonces estas son todas las propiedades de las funciones de demanda que se derivan de la maximización de la utilidad sujeta a la restricción presupuestaria. Para contestar esta pregunta, dividiremos el problema en dos partes:

1. Partir de un sistema de funciones de demanda (observable en principio), $x(p, w)$, y, a partir de éste, encontrar la función de gasto mínimo $e(p, u)$ para un determinado nivel de utilidad u.
2. Utilizar la función de gasto mínimo $e(p, u)$ para encontrar la relación de preferencias $\succeq$.

$$x(p, w) \quad \rightarrow \quad e(p, u) \quad \rightarrow \quad \succeq$$

6.4.1 Integrabilidad

El primer paso es el de encontrar la función de gasto mínimo $e(p, u)$ a partir de la función de demanda marshalliana $x(p, w)$. Para ello, devemos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. De aquí, que el problema se llame "integrabilidad", puesto que debemos integrar. Retomemos el problema de minimización de gasto, en donde $h(p, u)$ es la demanda hicksiana, y $e(p, u) = p \cdot h(p, u)$ es el gasto mínimo. Asimismo, del lema de Shephard,

$$h_l(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_l} \qquad h(p, u) = \nabla_p e(p, u).$$

Mientras que por dualidad, $h(p, u) = x(p, e(p, u))$. Esta primera parte del problema consiste en seguir el mismo camino, pero de regreso, es decir, partir de $x(p, e(p, u))$, que por dualidad es igual a $h(p, u)$, y encontrar $e(p, u)$ integrando.

Para ello, fijemos un nivel de precios e ingreso $(p^0, w^0) \gg 0$, y a la canasta $x(p^0, w^0)$ le asignamos un nivel de utilidad inicial u^0. Ahora, definamos $e(p^0) = e(p^0, u^0)$. ntonces, la función de gasto mínumo $e(p)$ debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial e(p)}{\partial p_l} = h_l(p, u^0) \qquad \forall\, l = 1, 2, \ldots, L,$$

y para la condción inicial $e(p^0, u^0) = w^0$.

El Teorema de Froebenius implica que un sistema de ecuaciones differenciales parciales tiene solución si

$$\frac{\partial^2 e(p)}{\partial p_l \partial p_k} = \frac{\partial^2 e(p)}{\partial p_k \partial p_l} \qquad \forall\, l, k = 1, 2, \ldots, L.$$

Es decir, si la matriz que resultara de $D_p^2 e(p)$ es simétrica para toda $p \gg 0$. Recordemos que $D_p^2 e(p) = S(p, e(p))$, la matriz de Slutsky, la cual es simétrica. Por lo cual una matriz de sustitución de Slutsky simétrica es suficiente para extraer la función de gasto mínimo $e(p, u)$ a partir de la demanda marshalliana $x(p, w)$. Si además $S(p, e(p))$ es negativa semidefinida, entonces $e(p, u)$ satisface las propiedades de una función de gasto mínimo.

Ejemplo: Demanda Cobb-Douglas

A continuación daremos un ejemplo, a partir de una sistema de funciones de demanda que ya conozcamos, el de Cobb-Douglas. Nuestro sistema está dado por:

$$x_l(p, e(p)) = \alpha_l \frac{e(p)}{p_l} = \frac{\partial e(p)}{\partial p_l}$$

Podemos resolver este sistema por separación. Movemos $e(p)$ al otro lado:

$$\frac{\alpha_l}{p_l} = \frac{\partial e(p)}{\partial p_l} \frac{1}{e(p)} = \frac{\partial \ln e(p)}{\partial p_l}.$$

Y podemos integrar ambos lados respecto a dp_l:

$$\int \frac{\alpha_l}{p_l} dp_l = \alpha_l \ln(p_l) = \ln e(p) + C_l = \int \frac{\partial \ln e(p)}{\partial p_l} dp_l,$$

donde C_l es una constante de integración para la correspondiente ecuación diferencial. Podemos exponenciar ambos lados de la ecuación para obtener:

$$p_l^{\alpha_l} = e^{\ln e(p)+C_l} = e(p)e^{C_l} \equiv e(p)e^{C_l}.$$

Despejando $e(p)$:

$$e(p) = \tilde{C}_l p_l^{\alpha_l},$$

donde $\tilde{C}_l = 1/e^{C_l}$. En total, tenemos L ecuaciones anteriores. Como todas las constantes de integración están multiplicando a $p_l^{\alpha_l}$, podemos incoporar la forma funcional de la función de gasto mínimo $e(p)$ como

$$e(p) = K\prod_{l=1}^{L} p_l^{\alpha_l}$$

donde K es el remanente de las constantes de integración al incorporar la forma funcional. Para encontrar K, utilizamos la condición inicial $e(p^0) = w^0$,

$$w^0 = K\prod_{l=1}^{L} (p_l^0)^{\alpha_l}$$

6.4.2 Recuperación de preferencias

La parte de integrabilidad puede ser tediosa o difícil de resolver, dependiendo de nuestra habilidad para las ecuaciones diferenciales. No obstante considero que es conceptualmente sencilla de entender: es dualidad y el Lema de Shephard en reversa. La recuperación de preferencias a partir de la función de gasto mínimo puede ser un tanto más complicada.

Proposición Asumamos que $e(p,u)$ es una función continua, estrictamente creciente en u, y creciente, homogénea de grado 1, cóncava y diferenciable en $p \gg 0$. Entonces, para cada nivel de utilidad $\bar{u}$, $e(p,\bar{u})$ es la función de gasto mínimo asociada al contorno superior

$$V_{\bar{u}} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ \ : \ p\cdot x \geq e(p,\bar{u}) \ \forall \ p \gg 0\}.$$

Esto es, $e(p,\bar{u}) = \min\{p\cdot x \ : \ x \in V_{\bar{u}}\}$ para toda $p \gg 0$.

Demostración:

Por las propiedades de $e(p,u)$ y la definición de $V_{\bar{u}}$, tenemos que $V_{\bar{u}}$ es un conjunto no vacío, cerrado y acotado por debajo. Por el teorema del máximo de Berge, $V_{\bar{u}}$ tiene un mínimo para toda $p \gg 0$ y, por definición, $e(p,\bar{u}) \leq \min\{p\cdot x \ : \ x \in V_{\bar{u}}\}$. Queda por demostrar que, asimismo, $e(p,\bar{u}) \geq \min\{p\cdot x \ : \ x \in V_{\bar{u}}\}$.

Dado que $e(p,u)$ es cóncavo en p, entonces

$$e(p',\bar{u}) \leq e(p,\bar{u}) + \nabla_p e(p,\bar{u})\cdot(p'-p)$$

Dado que $e(p,\bar{u})$ es homogénea de grado 1, por el teorema de Euler, $e(p,\bar{u}) = p\cdot\nabla_p e(p,\bar{u})$. Así, combinándolo con la desigualdad anterior,

$$e(p',\bar{u}) \leq p'\cdot\nabla_p e(p,\bar{u}) = p'\cdot h(p,\bar{u}),$$

donde la última igualdad es resultado del lema de Shephard. Por lo tanto,

$$\nabla_p e(p,\bar{u}) \in V_{\bar{u}} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ \ : \ p''\cdot x \geq e(p'',\bar{u}) \ \forall \ p'' \gg 0\}.$$

De lo anterior que $p\cdot\nabla_p e(p,\bar{u}) \geq \min\{p\cdot x \ : \ x \in V_{\bar{u}}\}$ para toda $p \gg 0$. Por el teorema de Euler, nuevamente, esto implica

$$e(p,\bar{u}) \geq \min\{p\cdot x \ : \ x \in V_{\bar{u}}\} \qquad \forall \ p \gg 0. \qquad \blacksquare$$

Aunque parece complicado, la proposición anterior dice algo que relativamente es obvio. Fijamos $(p, \bar{u})$ y obtenemos todas las canastas que implican un gasto mayor o igual a $e(p, \bar{u})$. Fijamos nuevamente $\bar{u}$, pero ahora para un nuevo nivel de precios p', obtenemos todas las canastas que implican un gasto mayor o igual a $e(p', \bar{u})$. Hacemos lo mismo para un nuevo nivel de precios p''. Una vez que hagamos esto para todas las posibles combinaciones de precios, obtenemos $V_{\bar{u}}$, que es la intersección de todos los conjuntos de canastas obtenidos anteriormente. La proposición nos dice que la envolvente inferior de este conjunto $V_{\bar{u}}$ es la curva de indiferencia para el nivel de utilidad $\bar{u}$. Un ejemplo sencillo nos ayudará.

Ejemplo: Demanda Cobb-Douglas

Retomemos el ejemplo de la función de gasto que obtuvimos con anterioridad. Por simplicidad, lo haremos únicamente en dos dimensiones. El problema se puede elaborar en más dimensiones de manera computacional; si bien deja de ser posible dar una representación gráfica, la intuición es la misma.

Retomemos el caso de dos bienes, $1, 2$, y por mayor simplicidad, señalemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. La función de gasto mínimo es caracterizada, entonces, por

$$\begin{aligned} e(p) =& K\sqrt{p_1 p_2} \\ K\sqrt{p_1^0 p_2^0} =& w^0. \end{aligned}$$

Asumamos que los precios que observamos en el mercado son $w^0 = 5$ y $p_1^0 = p_2^0 = 1$. Entonces, $K = 10$. La función de gasto mínimo es, entonces,

$$e(p) = 5\sqrt{p_1 p_2}.$$

Para obtener el conjunto superior asociado al nivel de utilidad $\bar{u}$, debemos obtener todas las canastas que implican un gasto mayor o igual a $e(p, \bar{u})$ para distintos niveles de $p \gg 0$. Por la homogeneidad de grado 0 de la función de demanda hicksiana, podemos normalizar el precio del bien 1 a $p_1 = 1$, y alterar únicamente p_2 para obtener todos los distintos niveles de precios.

Para determinado nivel de precios p, el componente correspondiente dentro de $V_{\bar{u}}$ está dado por:

$$x_1 + p_2 x_2 \geq 5\sqrt{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 \geq \frac{5}{\sqrt{p_2}} - \frac{x_1}{p_2}.$$

Consideremos $p = (0.25, 1)$, $p' = (1, 1)$ y $p'' = (4, 1)$. Entonces, para las desigualdades que usaremos son:

$$\begin{aligned} x_2 \geq& 10 - 4x_1 \\ x_2 \geq& 5 - x_1 \\ x_2 \geq& 2.5 - \frac{x_1}{4} \end{aligned}$$

En la Figura 6.12 demostramos cómo construimos este contorno superior. Las tres gráficas de arriba muestran la construcción de este contorno cuando consideramos únicamente 3 niveles de precios distintos. La gráfia inferior izquierda muestra la intersección de las anteriores tres áreas sombreadas, y que debería representar $V_{\bar{u}}$. No obstante, hay que recordar que $V_{\bar{u}}$ debe construirse para todos los niveles de precios $p \gg 0$. La gráfica inferior derecha muestra la construcción de $V_{\bar{u}}$ para una mayor cantidad de niveles de precios, y que forma un contorno superior más suave, y que guarda un mayor parecido al conjunto contorno superior que mostramos en la Figura 2.7. Como sabemos, además, que las preferencias son Cobb-Douglas, entonces reafirmamos que el conjunto superior que construimos a partir del problema de integrabilidad es correcto.

Un problema de este enfoque es que la manera en que las preferencias son recuperadas implica, en el paso 1 (integrabilidad), fijemos un nivel de utilidad $\bar{u}$, cuando el agente consume la canasta $x(p^0, w^0)$. Si partiéramos de una canasta distinta para un nivel de precios distinto, $x(p^1, w^1) \neq x(p^0, w^0)$, entonces partiríamos de un nivel de utilidad distinto para nuestro análisis, lo cual nos llevaría, potencialmente, a una curva de indiferencia distinta.

En el ejemplo anterior nos ahorramos este problema porque asumimos desde un inicio que las preferencias eran Cobb-Douglas. Cuando la estimación de la demanda es no paramétrica, deberíamos de recuperar las preferencias

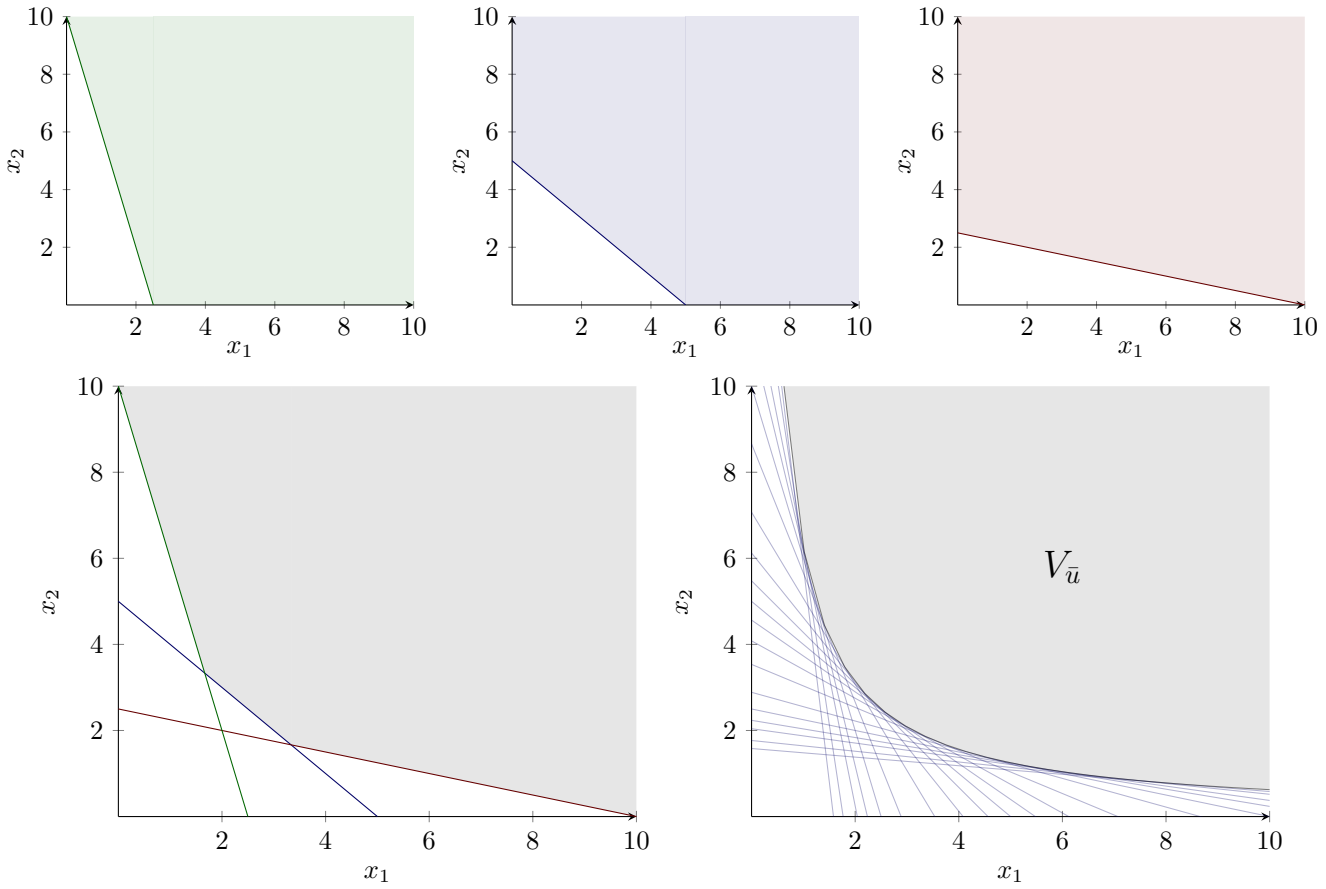


Figure 6.12: Conjunto contorno superior $V_{\bar{u}}$

para distintas canastas de consumo para construir distintas curvas de indiferencia, al menos las relevantes para realizar el análisis del bienestar que deseemos hacer.

En estos casos, una manera de lidiar con este problema es asumir algo más sobre las preferencias. Por ejemplo, podemos asumir que las preferencias son homotéticas, por lo cual a partir de una sola curva de indiferencia podemos recuperar todas las posibles curvas de indiferencia simplemente escalando la canasta de consumo, y manteniendo la tasa marginal de sustitución constante sobre los rayos que parten del origen. Otra alternativa es asumir que son de tipo cuasilineal respecto de alguno de los bienes, por lo que las demás curvas de indiferencia son traslaciones de la curva que obtenemos, sobre el eje del bien lineal.

6.4.3 Una nota sobre trabajos empiricos

En la práctica, la estimación de sistemas de demanda se hace a partir de modelos estadísticos paramétricos que derivan de resultados teóricos. Algunos modelos que se pueden utilizar van desde una función de utilidad CES para diversas categorías y productos, el Almost Ideal Demand System (AIDS) y su versión cuadrática (QuAIDS) o el Translog, que dotan de flexibilidad al sistema para la estimación de los parámetros, a la vez que imponen restricciones teóricas sobre los parámetros a estimar (principalmente aquellas que derivan de las agregaciones que referimos en la sección 3.5). De esta manera, las preferencias son impuestas a priori por el investigador, por lo que no se deja de fuera la integrabilidad para el análisis del bienestar.

Los modelos referidos anteriormente son utilizados principalmente cuando se trata de estimar demanda de bienes agregados, en donde el nivel de agregación permite considerar que se puede comprar una cantidad divisible de los bienes. De mayor interés, no obstante, ha sido estimar otros modelos de demanda discreta, en donde los consumidores optan por un solo bien de un conjunto de competidores. Uno de los modelos más populares es el

introducido por Berry, Levinsohn y Pakes (1995) (BLP).

Lo anterior escapa a esta nota, pero para quienes se quieran adentrar, el *Handbook of Industrial Organization* generalmente incluye un capítulo dedicado a la estimación de demanda, inlcuyendo los modelos de elección discreta. El primer capítulo de la última versión (2021) está escrito por Steven T. Berry y Philip A. Haile, y es una excelente introducción a la estimación de demanda discreta.

Finalmente, hay que en múltiples ocasiones, el análisis empírico se realiza sobre datos agregados. La teoría que hemos desarrollado hasta ahora da conclusiones individuales a partir de la relación de preferencias para un solo agente. En la siguiente sección veremos bajo qué supuestos podemos agregar las preferencias de los agentes, es decir, bajo qué supuestos podemos considerar que la demanda agregada puede racionalizarse como derivada de las preferencias de un agente representativo.

6.5 Preferencias Reveladas y el Teorema de Afriat

Una alternativa al la recuperación de preferencias está dada siguiendo la línea de las preferencias reveladas de Samuelson y Houthakker. En la sección 1.4 introdujimos una teoría que se desarrolló a la par de la maximización de utildiad, denominada la teoría de las preferencias reveladas. ¿Qué relación guarda con la maximización de utilidad? Sencillo, si para todo nivel de precios (p, w) existe una única cantidad que maximiza la utilidad del agente, entonces el axioma fuerte de preferencias reveladas caracteriza todas las implicaciones de la maximización de utilidad. Esto es, ambas formas de aproximarse al problema son equivalentes.

Violaciones al axioma fuerte de preferencias reveladas implica la inexistencia de una función de utilidad racional (preferencias transitivas y completas). No obstante, ni Samuelson ni Houthakker proveen de una manera de rechazar o aceptar la hipótesis de preferencias racionales a partir de datos observables en el marco de la teoría de las preferencias reveladas. Tampoco se ha dado una manera de construir las preferencias a partir de las preferencias reveladas de los agentes. Finalmente, el axioma fuerte de prefrencias reveladas no parmite correspondencias de demanda que asignan más de un posible valor al mismo vector de precios e ingreso (p, w).

Axioma generalizado de las preferencias reveladas
La relacion de demanda $x(p) = x(p, 1)$, con el ingreso w normalizado a 1 sin pérdida de generalidad, satisface el axioma generalizado de las preferencias reveladas si podemos construir las relaciones de preferencia R_0 (revelado directamente preferido a) y R (revelado indirectamente preferido a) tales que

1. Si para toda p^0, p^1, si $p^0 \cdot x(p^0) \geq p^0 \cdot x(p^1)$, entonces $x(p^0)R_0x(p^1)$. Esto es, $x(p^0)$ es revelado directamente preferido a $x(p^1)$ si, siendo $x(p^1)$ costeable bajo los precios p^0, el agente elige $x(p^0)$.
2. Si para toda $p^0, p^1, p^2, \ldots, p^K$, si $x(p^0)R_0x(p^1)$, $x(p^1)R_0x(p^2)$, $\ldots$ $x(p^{k-1})R_0x(p^k)$, entonces $x(p^0)Rx(p^k)$. En otras palabras, la relación de revelado indirectamente preferido a R_0 se obtiene mediante la transitividad de la relación de revelado directamente preferido a (R).
3. Si para toda p^0, p^1, si $x(p^0)Rx(p^1)$, entonces $p^0 \cdot x(p^0) \leq p^0 \cdot x(p^1)$. Esto es, si $x(p^0)$ es revelado (directa o indirectamente) preferido a $x(p^1)$, entonces $x(p^1)$ no puede ser más caro que $x(p^0)$. De lo contrario, el agente adquiriría $x(p^1)$ cuando los precios son p^1, pese a que $x(p^0)$ es costeable a p^1, y $x(p^0)$ es preferido a $x(p^1)$.

El enunciado incorpora el cierre cíclico de la revelación de preferencias, similar al axioma fuerte de preferencias reveladas, pero permite que la relación de demanda asigna más de un valor al mismo vector de precios e ingreso (una correspondencia de demanda propiamente hablando). Así, mientras que el axioma fuerte implica el axioma generalizado, lo contrario no es cierto.

Definición: Una función de utilidad $u(x)$ racionaliza los datos $\{p_t, x_t\}_{t=1}^T$ si $u(x_t) \geq u(\bar{x})$ para toda $\bar{x}$ tal que $p_t \cdot x_t \geq p_t \cdot \bar{x}$.
En otras palabras, una función de utilidad racionaliza los datos si los agentes están dispuestos a pagar más por una canasta que es revelada como preferida a otra canasta.
Teorema de Afriat: Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Existe una función de utilidad continua, localmente no saciable y cóncava $u(x)$ que racionaliza los datos $\{p_t, x_t\}_{t=1}^T$.
2. Existen valores $\{U_t, \lambda_t\}_{t=1}^T$ tales que

$$U_s \leq U_t + \lambda_t p_t \cdot (q_s - q_t) \qquad \forall\, s, t = 1, 2, \ldots, T.$$

   y $\lambda_t > 0$ para toda $t = 1, 2, \ldots, T$.
3. Los datos $\{p_t, x_t\}_{t=1}^T$ satisfacen el axioma generalizado de las preferencias reveladas.
4. Existe una función de utilidad localmente no saciable $u(x)$ que racionaliza los datos $\{p_t, x_t\}_{t=1}^T$.

Omito la demostradción.

En particular, para la recuperación de preferencias a partir de las preferencias reveladas, hacemos uso del segundo enunciado del teorema de Afriat. En particular, queremos determinar si existen valores $\{U_t, \lambda_t\}_{t=1}^T$ tales que

$$U_s \leq U_t + \lambda_t p_t \cdot (q_s - q_t) \qquad \forall\, s, t = 1, 2, \ldots, T,$$

y $\lambda_t > 0$ para toda $t = 1, 2, \ldots, T$. Si existen dichos valores, entonces se satisface el axioma generalizado. En general, si tenemos T observaciones, entonces tenemos $T(T+1)$ desigualdades que deben satisfacerse. Por ejemplo, para el caso de dods observaciones, las 6 desigualdades son:

$$\begin{aligned}
U_1 - U_1 - \lambda_1 p_1 \cdot (x_1 - x_1) &\leq 0 \\
U_1 - U_2 - \lambda_2 p_2 \cdot (x_1 - x_2) &\leq 0 \\
U_2 - U_1 - \lambda_1 p_1 \cdot (x_2 - x_1) &\leq 0 \\
U_2 - U_2 - \lambda_2 p_2 \cdot (x_2 - x_2) &\leq 0 \\
-\lambda_1 \leq \varepsilon - \lambda_2 & \qquad\qquad \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

donde ε es un valor muy pequeño, en particular, la tolerancia que le damos al sistema para la desigualdad estricta de las λ_t. Notamos que la primera y cuarta desigualdad son redundantes. En general, esta redundancia se traduce en una disminución de la cantidad de desigualdades que debemos satisfacer a T^2.

Los distintos valores de U_t y λ_t que satisfacen las desigualdades representan distintas funciones de utilidad que racionalizan los datos, por lo que no hay unicidad en la identificación de las preferencias. Quizás un problema más grande es el que, en ocasiones, los datos $\{p_t, x_t\}_{t=1}^T$ son tal que se vuelve imposible (o casi imposible) que se viole el axioma generalizado. Esto ocurre porque los datos observan con baja frecuencia, y porque hay bienes que se compran con diferentes periodicidades (por ejemplo, compramos frutas y verduras con mayor frecuencia que detergente, y éste con mayor frecuencia que automóviles).

El segundo potencial problema es el de la granularidad de los datos. En ocasiones se intenta realizar el análisis considerando a todos los consumidores como idénticos en sus preferencias. Esto es particularmente problemático en el análisis a partir de las preferencias reveladas, pues fácilmente puede dar origen a inconsistencias.

7 La Demanda Agregada

En las últimas décadas se ha incrementado la disponibilidad de datos relacionados a las compras individuales de cada agente (datos de escáneres en tiendas), así como la capacidad computacional para procesar estos datos. Esto permite realizar análisis más detallados sobre el comportamiento de los consumidores individuales, y contrastar los hallazgos empíricos con los supuestos de la teoría del consumidor. No obstante, la utilización de estos datos sigue siendo limitada. Una razón es que estos datos suelen ser propietarios, y acceder a ellos es costoso. Otra razón es que, aunque tengamos accesso a los datos sobre compras de los consumidores, puede ser difícil conectarlo a otros datos demográficos, a datos sobre compras históricas (particularmente importante en el caso de bienes duraderos), entre otros.

Por estas razones, el uso de datos agregados sobre consumo sigue siendo relevante y frecuentemente utilizado en la literatura. En el capítulo 3 obtuvimos la demanda de un consumidor como una función de los precios y el ingreso. Alteraremos ligeramente la notación en este capítulo. En particular, asumiremos que en una economía existen I consumidores, y para cada consumidor $i \in \{1, \dots, I\}$, denotaremos $x^i(p, w^i)$ su función de demanda, misma que es función de los precios p, idénticos para todos los consumidores, y de su propio ingreso w^i, el cual puede cambiar entre consumidores. La demanda agregada la definimos como la suma de las demandas individuales, y la denotaremos como $x(p, w)$ (esto es, omitiremos el superíndice i). Así, la demanda agregada se define como:

$$x(p, w^1, w^2, \dots, w^I) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w^i),$$

En este capítulo, más corto que los anteriores, analizaremos bajo qué supuestos la demanda agregada puede ser representada como una función de los precios, y el ingreso agregado de la economía. Esto es, bajo qué supuestos es posible encontrar que

$$x(p, w^1, w^2, \dots, w^I) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w^i) = x\left(p, \sum_{i=1}^{I} w^i\right)$$

Asimismo, nos interesa saber bajo qué supuestos la demanda agregada satisface el axioma débil de las preferencias reveladas (análisis positivo), y bajo qué supuestos la demanda agregada puede ser utilizada para realizar análisis del bienestar.

La importancia de entender la demanda agregada y los supuestos detrás de ella van más allá de la practicidad del uso de datos. En el análisis macroeconómico es de particular importancia poder entender a la economía en su totalidad como la suma de sus componentes. En modelos de equilibrio general, donde los precios son determinados por la interacción entre oferta y demanda, nos interesa saber cómo es que los precios pueden agregar información sobre las preferencias de los consumidores (así como sobre la escasez de los productos). Si no podemos realizar esta agregación, entonces de poco sirve el análisis que hasta ahora hemos realizado.

7.1 Demanda Agregada e Ingreso Agregado

Retomemos un poco de notación. Asumimos que en la economía existe un conjunto $\mathcal{I} = \{1, \dots, I\}$ de consumidores, y cada consumidor $i \in \mathcal{I}$ cuenta con una relación de preferencias $\succsim^i$, transitivas y completas, sobre el conjunto de L bienes en la economía. Por simplicidad, asumiremos también que dichas preferencias son continuas, por lo que son representables mediante una función de utilidad $u^i(x)$. Asimismo, cada agente cuenta con un ingreso $w^i \geq 0$, y enfrenta precios $p \gg 0$ por los bienes de la economía.

El problema de maximización de cada agente resulta en una función de demanda,

$$x^i(p, w^i) = \arg\max_{x \in \mathbb{R}^L_+} u^i(x) \quad \text{s.t. } p \cdot x \leq w^i.$$

Hasta ahora, no hemos introducido nada nuevo relativo al capítulo 3 más que la notación. Como anticipamos,

definimos la demanda agregada como la suma de las demandas individuales

$$x(p, w^1, w^2, \ldots, w^I) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w^i),$$

y nos interesa conocer bajo qué supuestos la demanda agregada puede ser representada como una función de los precios y el ingreso agregado de la economía:

$$x(p, w^1, w^2, \ldots, w^I) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w^i) = x\left(p, \sum_{i=1}^{I} w^i\right)$$

Una forma de entender esto es considerando los datos agregados de un país, y utilizando el producto interno bruto como el ingreso de los agentes. Así, el interés cambia a cómo cambia la canasta agregada de bienes consumidos ante cambios en el PIB. Por ejemplo, ante un incremento del 5% en el PIB, ¿cuánto cambia el consumo de alimentos? ¿Y el consumo de bienes duraderos como automóviles? ¿Y el consumo de bienes de lujo como joyería? ¿Y el consumo de bienes de primera necesidad como medicinas? ¿Y el consumo de bienes de entretenimiento como videojuegos? Etcétera.

No obstante, la representación de la demanda agregada como función del ingreso agregado impone una estructura muy fuerte sobre las preferencias de los consumidores. Para ver esto, consideremos dos asignaciones distintas de ingreso, $w = (w^1, w^2, \ldots, w^I)$ y $\tilde{w} = (\tilde{w}^1, \tilde{w}^2, \ldots, \tilde{w}^I)$, tales que

$$\sum_{i=1}^{I} w^i = \sum_{i=1}^{I} \tilde{w}^i.$$

y $w \neq \tilde{w}$. Una forma de pensar esto es que $\tilde{w}$ es una reasignación del ingreso de los agentes (imaginemos que el gobierno, sin costo alguno, puede realizar transferencias de ingreso entre los agentes). Si la demanda agregada es función del ingreso agregado, entonces

$$x\left(p, \sum_{i=1}^{I} w^i\right) = x\left(p, \sum_{i=1}^{I} \tilde{w}^i\right).$$

Definamos $dw^i = \tilde{w}^i - w^i$ como el cambio en el ingreso del agente i, tal que

$$\sum_{i=1}^{I} dw^i = 0.$$

La representabilidad de la demanda agregada como función del ingreso agregado implica entonces que:

$$x(p, w^1, w^2, \ldots, w^I) = x\left(p, w^1 + dw^1, w^2 + dw^2, \ldots, w^I + dw^I\right).$$

Entonces, para cada uno de los bienes $l \in \{1, \ldots, L\}$, tenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x_l(p, w^1, \ldots, w^I)}{\partial w^i} dw^i,$$

ya que las redistribuciones de ingreso no cambian la demanda agregada del bien l. Ahora bien, por la definición de la demanda agregada:

$$0 = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x_l(p, w^1, \ldots, w^I)}{\partial w^i} dw^i = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x_l^i(p, w^i)}{\partial w^i} dw^i$$

La ecuación anterior debe ser válida para todos los niveles de precio p, y para cualquier redistribución del ingreso $(dw^1, \ldots, dw^I)$ tal que $\sum_{i=1}^{I} dw^i = 0$. En particular, esto tiene que ser cierto cuando $dw^i = -dw^j$ para algún par de agentes i y j, y $dw^k = 0$ para todo agente $k \neq i, j$. De la ecuación anterior, entonces,

$$\frac{partial x_l^i(p, w^i)}{\partial w^i} dw^i + \frac{\partial x_l^j(p, w^j)}{\partial w^j} dw^j = \frac{partial x_l^i(p, w^i)}{\partial w^i} dw^i - \frac{\partial x_l^j(p, w^j)}{\partial w^j} dw^i = 0$$

y por lo tanto,

$$\frac{\partial x_l^i(p, w^i)}{\partial w^i} = \frac{\partial x_l^j(p, w^j)}{\partial w^j} \quad \forall i, j \in \mathcal{I},\ \forall l \in \{1, \ldots, L\}.$$

Lo anterior implica que, si es posible representar la demanda agregada como función del ingreso agregado, entonces la pendiente de la curva de Engel y de la curva de expansión del consumo de todos los agentes debe ser la misma y ser constante. Así, si bien se permite que los agentes tengan preferencias distintas, asumir una demanda agregada como funciónn del ingreso agregado es equivalente a asumir que todos los agentes responden de manera igual manera, en términos absolutos, ante cambios en el ingreso.

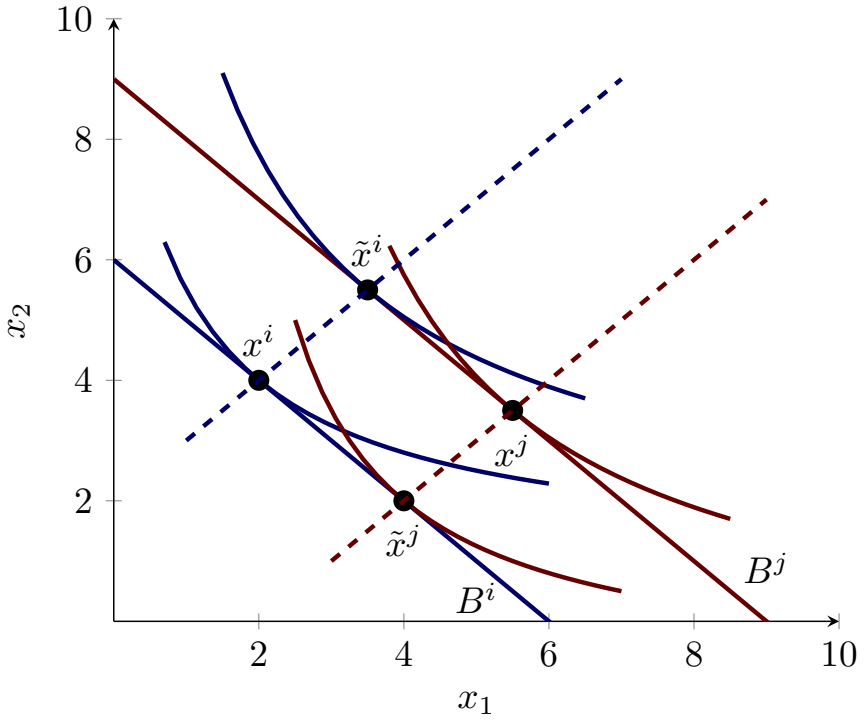


Figure 7.1: Expansión del consumo y Curva de Engel

La figura 7.1 muestra dos agentes distintos, i y j, en un mapa de preferencias, y cuyas curvas de Engel son paralelas. La restricción presupuestal más pequeña es la del agente i, mientras que la más grande es la del agente j. Inicialmente, estos agentes consumen las canastas x^i y x^j, respectivamente. Si intercambiamos el ingreso de los agentes, ahora el agente i consume la canasta $\tilde{x}^i$, mientras que el agente j consume la canasta $\tilde{x}^j$. Queda a los lectores verificar que, en este ejemplo gráfico, la demanda agregada no cambia para ninguno de los bienes. Así, los cambios individuales en las cantidades demandadas de cada agente se cancelan, y la demanda agregada no cambia. Queda, asimismo, verificar que las curvas de Engel son paralelas.

Algo que salta a la vista, no obstante, es que esta situación no puede mantenerse para todos los niveles de ingreso. En particular, para niveles de ingreso muy reducidos, las curvas de indiferencia están tan cercanas al origen, que mantener las curvas de Engel paralelas implica que los agentes consumirían cantidades negativas de los bienes, lo cual no es posible. Como ejemplo, si reducimos el ingreso del hogar más rico en el país en \$2,000, y se lo otorgamos al hogar más pobre, es muy probable que el hogar más pobre lo gaste en alimentos y medicinas, mientras que el gasto del hogar más rico en alimentos y medicinas no se vea afectado por dicha reducción. Esto violaría la representabilidad de la demanda agregada como función del ingreso agregado.

Proposición: Todods los consumidores tienen curvas de Engel y de expansiónn de consumo con la misma pendiente, para todo nivel de precios $p \gg 0$ si y solo sí sus preferencias resultan en una función de utilidad indirecta del tipo Gorman:

$$v(p, w) = a_i(p) + b(p)w_i$$

Notamos que mientras los agentes pueden tener una constante distinta, $a_i(p)$, para su curva de Engel (énfasis en el subíndice i), la pendiente de la curva de Engel, $b(p)$ es la misma para todos los agentes para cada nivel de precios p ($b(p)$ no lleva un subíndice i).

Demostrar que las funciones de utilidad indirecta del tipo Gorman satisfacen curvas de Engel y de expansiónn del consumo con la misma pendiente es sencillo, y podemos usar la identidad de Roy. Demostrar la otra dirección es más tedioso, y la omitiré por escapar a los objetivos de esta nota.

7.2 Demanda Agregada y el Axioma Débil de Preferencias Reveladas

En sentido más general, nos interesa saber qué propiedades de la función de demanda individual son heredadas por la función de la demanda agregada.

Si la función de demanda individual $x^i(p, w^i)$ es continua, homogénea de grado 0 en precios e ingreso y satisface la ley de Walras para cada individuo i, entonces la función de demanda agregada $x(p, w^1, w^2, \ldots, w^I)$ satisface estas mismas propiedades.

La demostración es obvia, por lo que la omitiré. De mayor interés es saber si la demanda agregada es consistente, al menos en el sentido de que satisfaga el axioma débil de las preferencias reveladas. Por simplicidad, denotemos

$$w = (w^1, w^2, \ldots, w^I)$$

el vector de ingresos.

Definición: La demanda agregada $x(p, w)$ satisface el axioma débil de si, para todo $(p, w) \gg 0$ y $(\tilde{p}, \tilde{w}) \gg 0$,:

$$p \cdot x(\tilde{p}, \tilde{w}) \leq w \text{ y } x(p, w) \neq x(\tilde{p}, \tilde{w}) \implies \tilde{p} \cdot x(p, w) > \tilde{w}$$

Esto no es más que la definición del axioma débil de las preferencias reveladas ya visto en la sección 1.4, sustituyendo la demanda individual por la demanda agregada (en adición al cambio de notación, para evitar confusiones con los supraíndices).

Es relativamente sencillo encontrar un ejemplo donde las demandas individuales satisfagan el axioma débil, pero la demanda agregada no. Para lo anterior, tornemos la vista a la Figura 7.2. Para este ejemplo, asumimos que el ingreso agregado de los agentes es w, y los dos contribuyen de manera igual a este ingreso, por lo que $w^i = w/2$ para $i = 1, 2$. La recta azul representa la restricción presupuestal de ambos agentes cuando los precios son p, mientras que la recta roja representa la restricción presupuestal de ambos agentes cuando los precios son $\tilde{p}$. Por simplicidad, denotemos $x^i \equiv x^i(p, w/2)$ y $\tilde{x}^i \equiv x^i(\tilde{p}, w/2)$ para ambos agentes.

Fijémonos primero en la gráfica a la izquierda, que muestra las demandas individuales para cada restricción presupuestal.Mediante esta figura, es fácil demostrar que ambas demandas individuales satisfacen el axioma débil de las preferencias reveladas. Para el agente 1:

$$p \cdot \tilde{x}^1 \leq \frac{w}{2} \text{ y } \tilde{x}^1 \neq x^1 \text{ y se cumple } \tilde{p} \cdot x^1 > \frac{w}{2}$$

Esto es, la canasta $\tilde{x}^1$ es asequible con el ingreso $w/2$ cuando los precios son p; si el consumidor 1 compra x^1 cuando los precios son p, entonces esa misma canasta x^1 no es asequible cuando los precios son $\tilde{p}$. Lo mismo se cumple para el agente 2:

$$\tilde{p} \cdot x^2 \leq \frac{w}{2} \text{ y } x^2 \neq \tilde{x}^2 \text{ y se cumple } p \cdot \tilde{x}^2 > \frac{w}{2}$$

No obstante, la demanda agregada violaría, en este ejemplo, el axioma débil de las preferencias reveladas. Una manera sencilla de ver esto es notar que, como el ingreso de cada agente es $w/2$ para ambos, el promedio de x^1 y x^2 es simplemente la demanda agregada dividida entre 2:

$$\frac{x^1 + x^2}{2} = \frac{x(p, w/2, w/2)}{2}$$

Lo mismo aplica para $\tilde{x}^1$ y $\tilde{x}^2$. En la Figura 7.2, en la gráfica de la derecha, mostramos la demanda agregada promedio, representada por $x = (x^1 + x^2)/2$, y similarmente $\tilde{x} = (\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2)/2$. La demanda agregada total requiere únicamente reescalar la demanda agregada promedio, junto con las respectivas restricciones presupuestales; el gráfico en este caso se vería idéntico, salvo por el cambio de escala en los ejes.

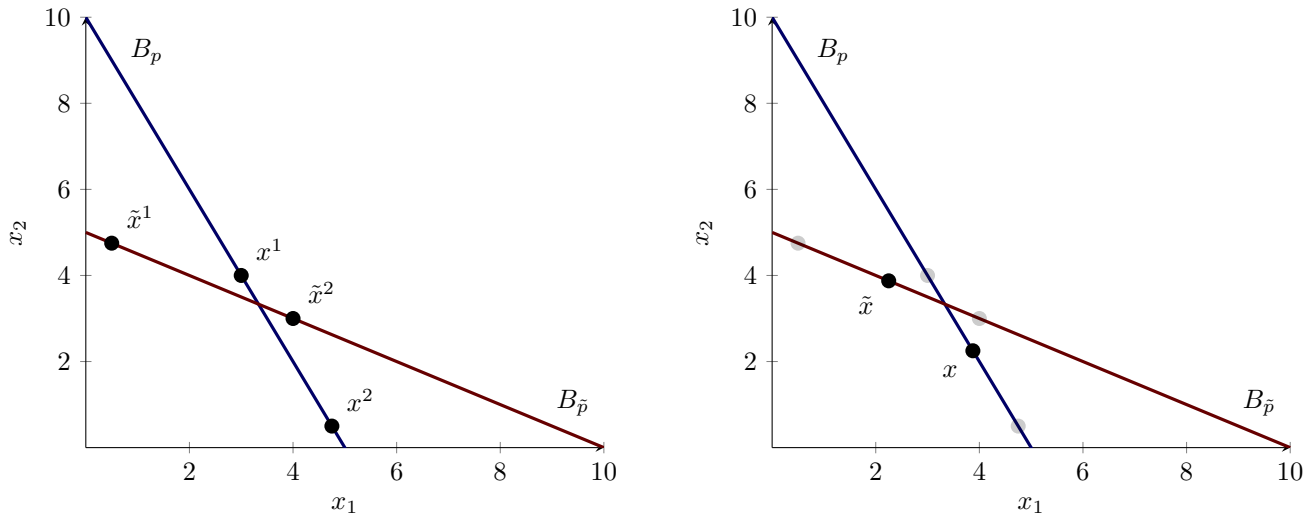


Figure 7.2: Axioma Débil de las Preferencias Reveladas y Demanda Agregada

Así, notamos que en la gráfica de la derecha la demanda agregada no satisface el axioma débil de las preferencias reveladas. Esto, ya que:

$$p \cdot \tilde{x} \leq w \text{ y } \tilde{x} \neq x \text{ y se cumple } \tilde{p} \cdot x \leq w.$$

En palabras, cuando los precios son $\tilde{p}$, la canasta x es asequible, por lo que en el agregado, la canasta $\tilde{x}$ se revela como preferida a la canasta x. No obstante, cuando los precios son p, la canasta $\tilde{x}$ sigue siendo asequible, pero ahora la cantidad demandada en el agregado es x, por lo que la canasta x se revela como preferida a la canasta $\tilde{x}$.

Esta es una inconsistencia que surge en el agregado, pese a que las preferencias individuales son racionales. Esto señala un problema general que surge al momento de intentar agregar preferencias: ciertas propiedades de las elecciones individuales que son deseables para poder racionalizar las preferencias no son necesariamente heredadas cuando se trata de agregar preferencias. Esta inconsistencia no es única de la teoría del consumidor, y se presenta en otras áreas de la economía, principalmente en el análisis de elección social. Para quienes deseen investigar más al respecto, un ejemplo sencillo es el de la paradoja de Condorcet cuando a partir de preferencias transitivas individuales se intenta obtener una preferencia social; no obstante, una regla de elección democrática (A es preferido socialmente a B si y solo si la mayoría de los individuos prefieren a A sobre B) resulta en una preferencia social intransitiva. De manera más general, quienes estén interesados pueden investigar sobre el teorema de imposibilidad de Arrow.

Regresando al tema que nos ocupa en esta sección, cabe preguntar qué propiedad debemos imponer sobre las preferencias individuales de tal manera que la demanda agregada satisfaga un mínimo de consistencia dado por el axioma débil de las preferencias reveladas. En la sección 4.3 vimos que la demanda individual satisface el axioma débil de las preferencias reveladas si y solo si satisface la ley de la demanda compensada.

Definición: Decimos que la función de demanda individual $x^i(p, w^i)$ satisface la **ley de la demanda no compensada** (énfasis en el NO compensada) si para toda $p, \tilde{p} \gg 0$ y $w^i > 0$,

$$(\tilde{p} - p) \cdot (x^i(\tilde{p}, w^i) - x^i(p, w^i)) \leq 0$$

y con desigualdad estricta, $<$, si $x^i(p, w^i) \neq x^i(\tilde{p}, w^i)$.

Nos remitimos a la sección 4.3 para la definición de la ley de la demanda compensada.[6] Notamos que la diferencia que existe entre la ley de la demanda compensada y la ley de la demanda no compensada es, precisamente, que en la ley de la demanda no compensada el ingreso del agente se mantiene constante en w^i, esto es, no se compensa. La ley de la demanda no compensada impone que las funciones de demanda Walrasiana o Marshaliana de los agentes tenga siempre una pendiente negativa. Esto es, se prohibe el comportamiento Giffen. Así, la Ley de la Demanda Compensada es lo que en cursos introductorios de microeconomía se conoce simplemente como la "Ley de la Demanda".

Esta es una propiedad más fuerte que la ley de la demanda compensada. En particular, si una función de demanda individual satisface la ley de la demanda no compensada, entonces satisface la ley de la demanda compensada y, por tanto, el axioma débil de las preferencias reveladas. La utilidad de imponer la ley de la demanda no compensada es que ésta puede agregarse entre los agentes:

$$\sum_{i=1}^{I} (\tilde{p} - p) \cdot (x^i(\tilde{p}, w^i) - x^i(p, w^i)) = (\tilde{p} - p) \cdot (x(\tilde{p}, w) - x(p, w)) \leq 0,$$

y con estricta desigualdad, $<$, si $x(p, w) \neq x(\tilde{p}, w)$. La desigualdad se debe a que estamos sumando puros números negativos (o iguales a cero). Entonces, si las demandas individuales satisfacen la ley de la demanda no compensada, la demanda agregada también lo hará. Como corolario, la demanda agregada satisfará el axioma débil de las preferencias reveladas.

¿Qué tan restrictivo es imponer la ley de la demanda no compensada? Puede que mucho, aunque la mayoría de las funciones de utilidad resultan en funciones de demanda que satisfacen la ley de la demanda no compensada. Por ejemplo, las preferencias Cobb-Douglas y, en general, cualesquiera preferencias homotéticas.

Más importante aún es que la proposición anterior no es del tipo si y sólo si. Esto es, es posible que la demnda agregada satisfaga la ley de la demanda no compensada pese a que las demandas individuales no lo hagan.

7.3 El Consumidor Representativo

En la mayoría de los cursos de economía, principalmente en los de macroeconomía, escucharemos hablar del consumidor representativo. Cabe entonces aclarar a qué nos referimos con ello. En esta pequeña subsección, alteraré un poco la notación, denotando w al ingreso agregado, y $w^i = \alpha^i w$ al ingreso del agente i, en donde $\alpha^i \in (0, 1)$, es la proporción de la riqueza que posee el individuo i, y $\sum_{i=1}^{I} \alpha^i = 1$.

[6] En la sección 5.2.1 tenemos una definición distinta de la Ley de la Demanda Compensada. La diferencia es que en la sección 4.3 realizamos una compensación en el ingreso a la "Slutsky", es decir, una que permita al agente comprar la misma canasta que compraba antes de la variación de precios. En la sección 5.2.1 realizamos una compensación en el ingreso a la "Hicks", es decir, una que permita al agente alcanzar el mismo nivel de utilidad que tenía antes de la variación de precios.

Aquí, quiero enfatizar que la comparación la estamos realizando respecto al axioma débil de las preferencias reveladas. En primer lugar, porque la variación compensatoria a la Hicks requiere de una función de utilidad, o al menos de un ordenamiento de preferencias que sea transitivo y completo. Hasta ahora, no tenemos una noción o una definición de una relación de preferencias agregadas. En segundo lugar, porque nos estamos enfocando en el axioma débil de las preferencias reveladas, y la variación compensatoria a la Slutsky se encuentra dentro del marco de la teoría de las preferencias reveladas, a diferencia de la variación compensatoria a la Hicks que se encuentra dentro del marco de la teoría de maximización de utilidad.

7.3.1 El Consumidor Representativo Positivo

Definición: Si existe, denominamos **consumidor representativo positivo** a la relación de preferencias $\succeq$ sobre las canastas de bienes $x \in \mathbb{R}^L_+$ tal que la demanda agregada $x(p,w)$ es la demanda Walrasiana de este consumidor ficticio cuando tiene a su disposición el ingreso agregado. Esto es, si $p \cdot x \leq w$ y $x \neq x(p,w)$, entonces $x(p,w) \succ x$.

El nombre de "consumidor" representativo es quizás desafortunado. Esto, ya que no se trata de un consumidor en realidad, sino únicamente de una relación de preferencias. Así, cabe aclara que el consumidor representativo NO es un consumidor que exista en la economía, ni un consumidor "promedio" ni "mediano". Podemos entender al consumidor representativo simplemente como una función de utilidad tal que el problema de maximización sujeto a la restricción presupuestal con el ingreso agregado da como resultado la demanda agregada para todo nivel de precios $p \gg 0$.

No referimos a este consumidor como "positivo" para enfatizar que la demanda que deriva de este consumidor meramente describe la demanda agregada. Esto, en contraposición del consumidor representativo normativo, que introduciré más adelante.

Un ejemplo sencillo

Para mejor entender la definición de un consumidor representativo, consideremos el siguiente ejemplo. Una economía cuenta únicamente con dos agentes $1,2$, y con dos bienes de consumo $1,2$. Denotamos x^i_l la demanda del bien l del agente i. El ingreso del agente i lo denotamos $\alpha^i w$, en donde $\alpha^i \in (0,1)$, y $\alpha^i + \alpha^j = 1$; así, w es el ingreso agregado de la economía.

La función de utilidad del agente i está dada por:

$$u^i(x^i_1, x^i_2) = \left(x^i_1\right)^{\beta^i} \left(x^i_2\right)^{1-\beta^i},$$

donde $\beta^i \in (0,1)$. Por lo que el problema de maximización está dado por:

$$\max_{x^i_1, x^i_2} \left(x^i_1\right)^{\beta^i} \left(x^i_2\right)^{1-\beta^i} \qquad \text{s.a.} \qquad p_1 x^i_1 + p_2 x^i_2 \leq \alpha^i w.$$

Esta es una función de utilidad Cobb-Douglas, por lo que la solución del problema de maximización está dada por:

$$x^i_1(p, \alpha^i w) = \beta^i \frac{\alpha^i w}{p_1} \qquad \text{y} \qquad x^i_2(p, \alpha^i w) = (1-\beta^i)\frac{\alpha^i w}{p_2}.$$

La demanda agregada está dada por:

$$x_1(p, \alpha^1 w, \alpha^2 w) = x^1_1(p, \alpha^1 w) + x^2_1(p, \alpha^2 w) = \beta^1 \frac{\alpha^1 w}{p_1} + \beta^2 \frac{\alpha^2 w}{p_1} = (\beta^1\alpha^1 + \beta^2\alpha^2)\frac{w}{p_1}$$
$$x_2(p, \alpha^1 w, \alpha^2 w) = x^1_2(p, \alpha^1 w) + x^2_2(p, \alpha^2 w) = (1-\beta^1)\frac{\alpha^1 w}{p_2} + (1-\beta^2)\frac{\alpha^2 w}{p_2} = ((1-\beta^1)\alpha^1 + (1-\beta^2)\alpha^2)\frac{w}{p_2}$$

Dado que la función es Cobb-Douglas, podemos fácilmente encontrar una función de utilidad que, a partir del ingreso agregado, nos dé la demanda agregada. En particular, consideremos la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = (x_1)^{\gamma} (x_2)^{1-\gamma}.$$

donde $\gamma = (\beta^1\alpha^1 + \beta^2\alpha^2)$, y recordando que $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$, es fácil mostrar que $1 - \gamma = (1-\beta^1)\alpha^1 + (1-\beta^2)\alpha^2$. Si maximizamos $u(x_1, x_2)$ sujeto al ingreso agregado w, obtenemos demandas marshallianas que son idénticas a la demanda agregada. En este sentido, denominamos a $u(x_1, x_2) = (x_1)^{\gamma} (x_2)^{1-\gamma}$ como el consumidor representativo, aunque ni el consumidor 1 ni el consumidor 2 tengan esta función de utilidad.

7.3.2 El Consumidor Representativo Normativo

El consumidor representativo positivo es simplemente una relación de preferencias cuyo problema de maximización da como resultado una función de demanda igual a la demanda agregada. Ahora, es de interés realizar no sólamente un análisis descriptivo, sino un análisis normativo, esto es, un análisis de bienestar. En las secciones anteriores, al tratar con agentes exclusivamente en lo individual, la noción de bienestar en términos monetarios era relativamente sencilla: el cambio en el bienestar de un agente es la cantidad que compensa al agente ante el cambio en los precios (variación compensatoria), o la cantidad que deja al agente indiferente ante el cambio en los precios (variación equivalente).

Cuando tratamos con la demanda agregada, podríamos aplicar una extención de estas nociones de cambio en el bienestar, y considerar que el cambio en el bienestar social es simplemente la suma de las variaciones compensatorias o de las variaciones equivalentes. No obstante, nos interesaría también expandir la noción del bienestar para reflejar la importancia relativa de cada agente en nuestra economía.

Definición: Una función de Bienestar Social (de tipo Bergson-Sammuelson), $W : R^I \to \mathbb{R}$, es una función que asigna un valor de utilidad social a cada vector de utilidades individuales: $(u^1, u^2, \ldots, u^I) \mapsto W(u^1, u^2, \ldots, u^I)$.
En adelante, además asumiremos que esta función es creciente (incrementos en la utilidad de todos los agentes implica un incremento en el bienestar social), cóncava y diferenciable para toda u^i.

La función de bienestar social es una visión utilitarista. Contrario a lo que hasta ahora hemos visto, presupone la posibilidad de comparar niveles de utilidad entre los distintos agentes frente a distintas asignaciones de los bienes en la economía.

Cuando tratamos en precios en vez de cantidades, podemos utilizar la función de utilidad indirecta para cada agente, $v^i(p, w^i)$, dentro de la función de bienestar social. Así, la función de bienestar social queda definida como:

$$W(v^1(p, w^1), v^2(p, w^2), \ldots, v^I(p, w^I)).$$

Ahora supongamos la existencia de un planificador central que, para cada nivel de precios $p \gg 0$, puede elegir una redistribución del ingreso entre todos los agentes de la economía para maximizar el bienestar social. Esto es, el planificador central resuelve:

$$\max_{\{w^i\}_{i=1}^I} W(v^1(p, w^1), v^2(p, w^2), \ldots, v^I(p, w^I)) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{I} w^i = w. \tag{7.1}$$

Al argumento que maximiza el problema anterior lo denotamos $w^i(p, w)$

Proposición: Supongamos que para cada nivel de precios $p \gg 0$, $(w^1(p, w), w^2(p, w), \ldots, w^I(p, w))$ es la solución del problema en (7.1). Entonces, la función valor del problema, $W(v^1(p, w^1(p, w)), \ldots, v^I(p, w^I(p, w)))$, es una función de utilidad indirecta para el consumidor representativo positivo cuya demanda agregada es

$$x(p, w) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w^i(p, w)).$$

Demostración:

Lo primero es verificar que la función valor del problema en (7.1) satisface las propiedades de una función de utilidad indirecta detalladas en la sección 3.7.1: homogeneidad grado cero en precios e ingreso, estrictamente creciente en w y no creciente en p, cuasiconvexa y continua. Esto es sencillo de verificar, y resultan del supuesto de que W es creciente y cóncava. Omitiré la prueba por brevedad.

Más interesante es demostrar que se satisface la identidad de Roy. Denotemos λ al multiplicador de Lagrange

asociado a la restricción sobre el ingreso en 7.1. De nuestras condiciones de primer orden, tenemos que:

$$\frac{\partial W}{\partial u^i}\frac{\partial v^i}{\partial w^i} = \lambda \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, I.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial W}{\partial u^i} = \lambda\left(\frac{1}{\nabla_{w^i} v^i(p, w^i)}\right) \tag{7.2}$$

Denotemos $x_R(p, w)$ a la demanda agregada del consumidor representativo positivo, y $v(p, w)$ a su función de utilidad indirecta, ambas funciones que dependen únicamente del ingreso agregado. Esto es:

$$v(p, w) = W(v^1(p, w^1(p, w)), v^2(p, w^2(p, w)), \ldots, v^I(p, w^I(p, w)))$$

Entonces, por la identidad de Roy:

$$x_R(p, w) = -\frac{1}{\nabla_w v(p, w)}\nabla_p v(p, w)$$

Dado que λ sigue siendo la utilidad marginal del ingreso agregado del consumidor representativo, respecto de la función de bienestar social W, tenemos que:

$$\nabla_w v(p, w) = \frac{\partial v(p, w)}{\partial w} = \lambda$$

Adicionamente, para cada bien l, el teorema de la envolente nos indica que:

$$\nabla_p v(p, w) = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial W}{\partial u^i}\nabla_p v^i(p, w^i(p, w)) + \lambda \sum_{i=1}^{I} \nabla_p w^i(p, w)$$

No obstante, dado que $\sum_{i=1}^{I} w^i = w$, tenemos que $\sum_{i=1}^{I} \nabla_p w^i(p, w) = 0$; esto es, la suma de las reasignaciones del ingreso ante el cambio en los precios tiene que ser cero, pues el ingreso agregado se mantiene constante:

$$\nabla_p v(p, w) = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial W}{\partial u^i}\nabla_p v^i(p, w^i(p, w))$$

Finalmente, sustituyendo en la identidad de Roy, tenemos que:

$$x_R(p, w) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{I} \frac{\partial W}{\partial u^i}\nabla_p v^i(p, w^i(p, w))$$

Y finalmente, sustituyendo la ecuación 7.2

$$\begin{aligned} x_R(p, w) &= -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{I} \lambda\left(\frac{1}{\nabla_{w^i} v^i(p, w^i)}\right)\nabla_p v^i(p, w^i(p, w)) \\ &= \sum_{i=1}^{I} x_i(p, w^i(p, w)) = x(p, w) \end{aligned}$$

de donde la igualdad de la segunda línea resulta de cancelar las λs y aplicar la identidad de Roy para cada agente i.■

Este resultado indica que si podemos de alguna manera comparar los niveles de utilidad de los agentes, entonces:

- Podemos construir una función de bienestar social que asigne un valor de utilidad social para cada vector de utilidades individuales.
- Utilizando las funciones de utilidad indirecta de los agentes, podemos construir esta función de bienestar social únicamente en función de los precios y de los ingresos individuales.

- Podríamos maximizar el bienestar social realizando una redistribución del ingreso entre los agentes.
- Una vez realizada dichas distribuciones para cada nivel de precios $p \gg 0$ e ingreso agregado w, la función valor del problema de maximización de la función de bienestar social es una función de utilidad indirecta para el consumidor representativo positivo.
- En particular, la demanda de dicho consumidor representativo positivo es la demanda agregada de los agentes individuales cuando se realiza la redistribución del ingreso

Hasta ahora hemos hablado únicamente del consumidor representativo positivo. El interés, no obstante, ha sido dilucidar cuándo es que a dicho consumidor representativo positivo podemos asignarle un valor normativo. Esto es, cuándo es que a dicho consumidor representativo positivo lo podemos considerar para efectos de análisis del bienestar.

Definición: Decimos que el consumidor representativo positivo con preferencias $\succeq$ y demanda agregada $x(p,w) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w^i(p,w))$ es un **consumidor representativo normativo** respecto de una función de bienestar social W si, para todo nivel de precios e ingreso agregado $(p,w) \gg 0$, la redistribución del ingreso es tal que resulta del problema de maximización en la ecuación (7.1) y, por tanto, su función valor es una función de utilidad indirecta para la relación de preferencias $\succeq$.

Este resultado nos indica que podemos realizar análisis del bienestar utilizando la demanda agregada, sólo si (1) existe un consumidor representativo positivo, y (2) creemos que la distribución del ingreso entre los agentes de la economía es óptima en términos de determinada función del bienestar social W. Esto es un supuesto muy fuerte. El primer punto implica, como vimos anteriormente, que todos los agentes responden de igual manera a cambios en el ingreso (curvas de Engel y de expansión del consumo paralelas). El segundo punto implica que podemos comparar los niveles de utilidad de los agentes y crear una función de bienestar social que agregue el bienestar individual de los agentes. Finalmente, que la distribución del ingreso entre los agentes es óptima en términos de dicha función de bienestar social. Así, aunque exista el consumidor representativo positivo, puede que no exista una función de bienestar social para la cual dicho consumidor representativo positivo sea también normativo.

8 Decisiones bajo incertidumbre

Anteriormente hemos considerado la toma de decisiones de los agentes en un estado de certidumbre; esto es, los agentes tienen preferencias sobre un conjunto de canastas, y eligen aquella que les otorga mayor beneficio, sujetos a una restricción presupuestal. En su momento introdujimos el concepto de función de utilidad que, si ciertas propiedades sobre las preferencias se cumplen, entonces existe una función de utilidad que puede representar el orden de preferencias. Esta nota tratará con el modelo de "Teoría de la Utilidad Esperada" para analizar la toma de decisiones. Este modelo considera que los utilidades maximizan el valor esperado de su utilidad, dada por la suma de la utilidad recibida en cada estado de cosas por la probabilidad de ocurrencia. Esto requerirá que repensemos la función de utilidad para considerar conceptos como preferencias por el riesgo.

8.1 Loterías

Una lotería $L = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ es un conjunto de probabilidas para cada posible estado del mundo $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, tal que $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ y $\pi_i \geq 0 \; \forall i$. Un estado del mundo c_i, que ocurre con probabilidad p_i refiere a las circunstancias que caracterizan un fenómeno de interés. Por ejemplo, podemos pensar en un mundo simple en el que existen dos estados del mundo: está lloviendo o está soleado. Una lotería define con qué probabilidad está lloviendo, y con qué probabilidad está soleado.

La lotería descrita anteriormente se conoce como una lotería simple, pues a cada posible estado de cosas le asigna una única probabilidad. No obstante, podemos pensar también en loterías compuestas, tal que cierta lotería $L^k = (\pi_1^k, \pi_2^k, \ldots, \pi_n^k)$ para los mismos estados del mundo $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ocurre con probabilidad α_k, tal que $\alpha_k > 0 \; \forall k$ y $\sum_{j=1}^{K} \alpha_j = 1$. Esta lotería compuesta puede ser reducida a una lotería simple, obteniendo la suma sobre las probabilidades de ocurrencia en cada estado de cosas de cada lotería, sobre las probabilidades de ocurrencia de cada lotería:

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \pi_i^j$$

Las probabilidades anteriores se denominan lotería reducida. Para la presente teoría de decisiones bajo incertidumbre, supondremos que los agentes tienen preferencias exclusivamente sobre las loterías reducidas.

Un ejemplo simple es el de un agente buscando empleo. En la empresa local tendrá un buen equipo de trabajo con probabilidad 1/2 y un mal equipo de trabajo con probabilidad 1/2 también (denominamos a ésta como Lotería 1). Otra opción es una empresa con varias oficinas. No obstante, si consigue empleo ahí, con probabilidad 1/3 lo mandan a la oficina "A", y con probabilidad 2/3 lo mandan a la oficina "B". Asimismo, en la oficina "A", tendrá un buen equipo de trabajo con probabilidad 3/4 y un mal equipo de trabajo con probabilidad 1/4. En la oficina "B", tendrá un buen equipo de trabajo con probabilidad 3/8 y un mal equipo con probabilidad 5/8 (denominamos a ésta Lotería 2). Podemos hacer una representación gráfica:

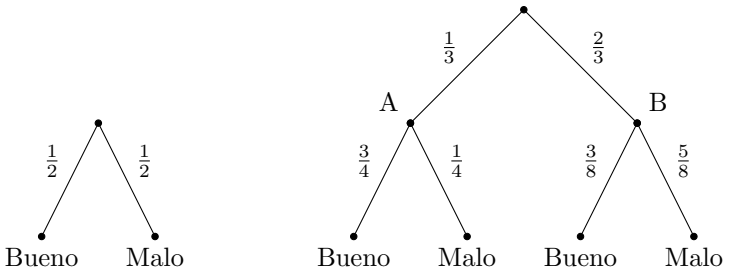


Figure 8.1: Loterías simples (1, izquierda) y compuestas (2, derecha)

No obstante, si reducimos la Lotería 2, notamos que con probabilidad $1/3 \times 3/4 + 2/3 \times 3/8 = 1/2$ el agente

estará en un buen equipo de trabajo, y con probabilidad $1/3 \times 1/4 + 2/3 \times 5/8 = 1/2$ estará en un mal equipo de trabajo.

Para efectos de la teoría que veremos aquí, los agentes únicamente consideran las loterías reducidas. Si dos loterías tienen la misma forma reducida, el agente entonces considerará a estas dos loterías como idénticas. En el ejemplo anterior, cualquier agente será indiferente entre la Lotería 1 y la Lotería 2, sin importar sus preferencias individuales, por el simple hecho de que ambas loterías tienen la misma forma reducida. Éste es un supuesto fuerte, pues considera que los agentes pueden reducir cualquier lotería compuesta a una lotería simple. No obstante, podríamos pensar que frente a una lotería simple y una compuesta con la misma forma reducida, los agentes preferirían una lotería simple pues son adversos a realizar cálculos. Por ahora supondremos que este supuesto se mantiene.

Al igual que nuestro plano cartesiano para representar distintas canastas de dos bienes en la teoría sin incertidumbre, podemos ilustrar distintas loterías gráficamente utilizando triángulos. Veamos la gráfica a continuación:

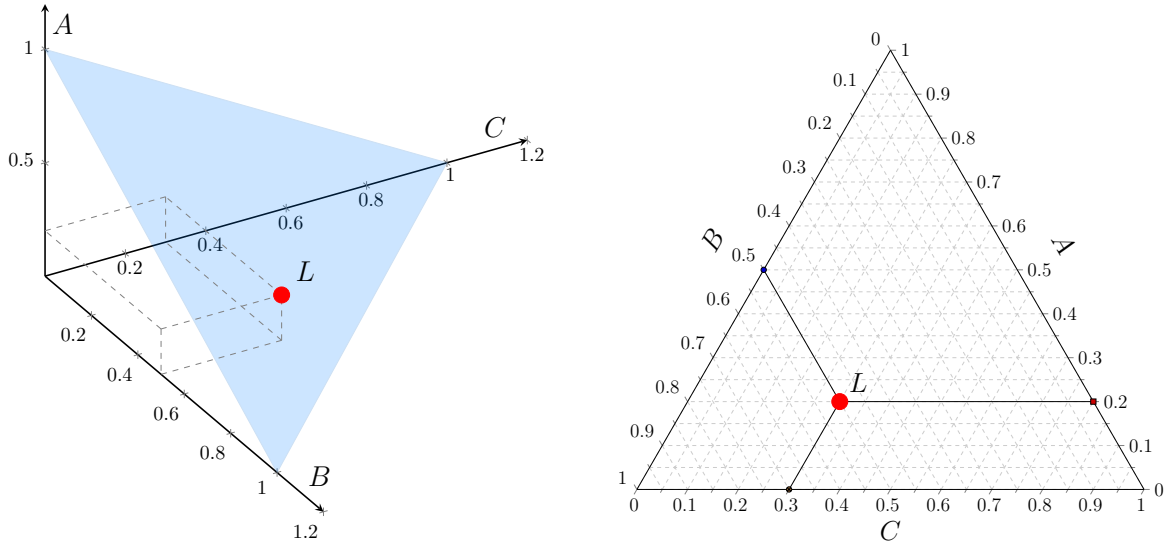


Figure 8.2: Representación gráfica de las loterías

En la gráfica a la izquierda tenemos un espacio euclidiano en el que el eje vertical representa la probabilidad del estado de cosas "A", el eje horizontal la probabilidad para el estado de cosas "C" y el transversal a la probabilidad del estado de cosas "B". En este mundo de tres estados de cosas, cualquier lotería deberá satisfacer $\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$, con $p_i \geq 0$. Esto está representado en el espacio euclidiano como el tríangulo sombreado en azul. Al elegir cualquier lotería $L = (p_A, p_B, p_C)$, esta necesariametne se ubicará sobre este plano triangular. En particular, mostramos una lotería L en la gráfica, que muestra que el estado de cosas "A" ocurre con probabilidad 0.2, el estado de cosas "B" con probabilidad 0.5 y el estado de cosas "C" con probabilidad 0.3.

Una alternativa para mostrar las loterías es mediante la gráfica de la derecha, que guarda cierta simulitud con la gráfica de la derecha. A este tipo de gráfica se le conoce como **gráfica ternaria** o simplex, y en general se utiliza para representar proporciones de tres elementos que tienen una suma constante (en este caso, las probabilidades suman a uno). Quienes no estén familiarizados con esta representación, les recomiendo tomarse un momento para familiarizarse con ella. Lo primero que salta a que un punto no se representa a 90° de los ejes, sino que se representa a 60° de su eje. Dejamos como ejercicio al lector corroborar que cualquier punto dentro del triángulo representa una lotería válida, esto es, a cada estado de cosas le asigna una probabilidad no negativa, y la suma de las probabilidades es igual a uno.

Existen loterías que dan un estado del mundo con probabilidad 1, y cualquier otro estado con probabilidad 0: $L = \{\pi_i\}_{i=1}^n$ tal que $\pi_m = 1$ para alguna m, y $\pi_n = 0$ $\forall n \neq m$. A estas loterías se les conoce como **loterías degeneradas**. En nuestras gráficas anteriores, las loterías degeneradas estarán en los vértices de nuestro triángulo. En particular, notemos cómo la lotería que asigna una probabilidad de 1 al evento A y 0 a los eventos B y C se representa en el vértice superior del triángulo. Las loterías que asignan probabilidad 1 a los eventos B y C se representan en los vértices izquierdo y derecho del triángulo, respectivamente.

En general podemos pensar en cualquer lotería simple como una lotería compuesta de múltiples loterías degeneradas. A manera de ejemplo, una lotería simple $L = (\pi_1, \pi_2)$ la podemos pensar como la composición de las loterías degeneradas $L_1 = c(1, 0)$ y $L_2 = c(0, 1)$, en donde la primera ocurre con probabilidad $\alpha_1 = \pi_1$, y la segunda ocurre con probabilida $\alpha_2 = \pi_2$.

8.2 Preferencias sobre loterías

En adelante supondremos que las decisiones se toman considerando loterías reducidas, ya sea por existir una lotería simple, o porque el agente puede reducir cualquier lotería compuesta. Definimos este conjunto de loterías simples como $\mathscr{L}$, y sobre la cual los agentes tienen preferencias $\succeq$. En adición a los supuestos de *completitud y transitividad* que asumimos para un agente racional en la teoría del consumidor sin incertidumbre, y cuya definición es la misma que en la sección 1.2 (con la salvedad de que las preferencias se establecen sobre loterías en vez de canastas) vamos a introducir dos propiedades adicionales:

1. **Continuidad**: Para cualquier $L, M, N \in \mathscr{L}$, los conjuntos

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)M \succeq N\} \subset [0,1]$$

y

$$\{\alpha \in [0,1] : N \succeq \alpha L + (1-\alpha)M\} \subset [0,1]$$

son cerrados. Este concepto de continuidad es distinto al que consideramos en la sección 1.2, pero cumple una función similar: excluye que cambios infinitesimales en las probabilidades alteren discrecionalmente las preferencias sobre dos loterías (por ejemplo, preferencias lexicográficas).[a]

2. **Independencia**: Para toda $L, M, N \in \mathscr{L}$ y $\alpha \in (0, 1)$

$$L \succeq M \qquad \text{si y sólo si} \qquad \alpha L + (1-\alpha)N \succeq \alpha M + (1-\alpha)N$$

Esto eso, si dos loterías son mezcladas con una tercera en la misma proporción, el orden de las preferencias no se ve alterado. Una forma alternativa de verlo es que, frente a dos loterías (reducidas) diferentes, pero para cuales algunos de sus componentes son iguales, los agentes deciden su ordenamiento de preferencias únicamente atendiendo a lo que es distinto.

[a] Recordemos que un conjunto cerrado, el cual escribimos $[a, b]$, incluye a a y a b como parte del conjunto. Un conjunto abierto, denotado como (a, b), incluye a a pero excluye a b. No obstante, números infinitesimalmente menores a b siguen dentro del conjunto. El problema para continuidad de que sean conjuntos abiertos es que no existiría un punto medio en el que la combinación de ambas loterías sean indiferentes a una lotería intermedia. Podríamos pensar en un auto que intenta rebasar a otro: al inicio está detrás, y al final está delante, pero por un instante deben de estar en el mismo lugar.

Podemos pensar en una manera alternativa de pensar en continuidad a partir de una medida arquimediana. Así, decimos que la relación de preferencias $\succeq$ es arquimediana si para toda $L, M, N \in \mathscr{L}$ tal que $L \succ M \succ N$:

- Existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\alpha L + (1-\alpha)N \succ M$.
- Existe $\beta \in (0, 1)$ tal que $M \succ \beta L + (1-\beta)N$

Esta propiedad igualmente señala que si una lotería L es estrictamente preferida a otra M, entonces existen cambios suficientemente a partir de L que siguen siendo preferidos a M. Para efectos de demostrar el teorema de von Neuman Morgenstern mencionado adelante, se puede sustituir la propiedad de continuidad por la arquimediana.

En la teoría del consumidor sin incertidumbre, tiene sentido pensar en que las decisiones no son independientes, pues el consumo de un bien se hace en conjunto con otro, y la utilidad total dependerá del grado de complementariedad que dos bienes tengan. Pensemos en el siguiente ejemplo en una situación sin incertidumbre.

- Existen 3 productos: x_1, x_2 y x_3.
- La canasta $x = (10, 0, 0)$ lleva 10 unidades del producto x_1, y ninguna de los otros dos productos. La canasta $y = (0, 10, 0)$ lleva 10 unidades del producto x_2, y ninguna de los otros dos productos. La canasta $z = (0, 0, 10)$ lleva 10 unidades del producto x_3, y ninguna de los otros dos productos.

- El agente tiene preferencias tal que $x \succ y$.
- Denotemos $x' = \alpha x + (1-\alpha)z$ y $y' = \alpha y + (1-\alpha)z$.
- No obstante, no hay razón para pensar que $x' \succ y'$, pues el agente ahora mezcla los productos x_1 con x_3 y x_2 con x_3. La relación de preferencias entre x' y y' dependerá de la complementariedad entre los productos.
- Es posible pensar que x_1 se vuelva tóxico al mezclarse con x_3, pero no así con x_2. En este caso, es razonable pensar que $y' \succ x'$.

En decisiones bajo incertidumbre, no pensamos en que la lotería L se consuma junto con la lotería N. El crear una nueva lotería $\alpha L + (1-\alpha)N$ crea una nueva lotería compuesta, que puede ser reducida a una lotería simple. En este caso, el agente únicamente tiene interés sobre las nuevas probabilidades de ocurrencia de cada estado de cosas. Como tanto L como M combinan sus probabilidades de ocurrencia con N en la misma proporción, entonces el agente no tiene razón para preferir una sobre la otra.

Si bien esta noción de independencia es deseable, como supuesto ha encontrado críticas y evidencia en su contra, mejor representados por la denominada Paradoja de Allais. Para ejemplificar, imaginemos un conjunto de pagos (nuestros estadosd del mundo) $C = (\$5M, \$1M, \$0)$ que ocurre con las siguientes probabilidades en las loterías correspondientes:

$$\begin{aligned} L_1 &: (0,1,0) \\ L_2 &: \left(\frac{10}{11}, 0, \frac{1}{11}\right) \\ A &: (0,1,0) \\ B &: (0,0,1) \end{aligned}$$

Resumimos esta información en la Tabla 1

Pago	Escenario A		Escenario B	
	A1	A2	B1	B2
\$5 Millones	0.00	0.10	0.00	0.10
\$1 Millón	1.00	0.89	0.11	0.00
\$0	0.00	1.00	0.89	0.90

Table 1: Paradoja de Allais

A partir de estas probabilidades, podemos construir otras probabilidades combinando las probabilidades de L_1 y L_2 con las probabilidades de A y B. Así, en las loterías correspondientes, las probabilidades a cada posible pago van a estar dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{11}{100}L_1 + \frac{89}{100}A = (0,1,0) \\ A_2 &= \frac{11}{100}L_2 + \frac{89}{100}A = \left(\frac{10}{100}, \frac{89}{100}, \frac{1}{100}\right) \\ B_1 &= \frac{11}{100}L_1 + \frac{89}{100}B = \left(0, \frac{11}{100}, \frac{89}{100}\right) \\ B_2 &= \frac{11}{100}L_2 + \frac{89}{100}B = \left(\frac{10}{100}, 0, \frac{90}{100}\right) \end{aligned}$$

Dado que el axioma de independencia es de tipo "si y sólo si", entonces $L_1 \succeq L_2 \iff A_1 \succeq A_2 \iff B_1 \succeq B_2$. De igual manera, $L_2 \succeq L_1 \iff A_2 \succeq A_1 \iff B_2 \succeq B_1$. La Paradoja de Allais se origina en diversos experimentos[7] que resultaron que generalmente los sujetos elegían la opción A_1 (1 millón seguros) sobre A_2, pero elegían B_2 sobre B_1, en clara violación del axioma de independencia.

Al respecto, se ha hipotetizado que esta situación ocurre únicamente cuando los agentes tienen presentes decisiones extremas (como pagos muy elevados o muy bajos) o probabilidades en extremos. Para atender esto han surgido alternativas a la teoría de la utilidad esperada. La teoría prospectiva (Kahneman y Tversky) propone un punto de partida considerado por los agentes, y a partir del cual descuentan el valor de cada estado, sancionando más severamente las pérdidas que las ganancias (aversión a las pérdidas). El modelo de utilidad esperada dependiente de rango (Quiggins) pondera sólo los resultados extremos sin ajustar todas las probabilidades. Asimismo, el modelo de utilidad esperada máxima (Gilboa y Schmeidler) considera las probabilidades de cada estado de cosas como inciertas para los agentes (las probabilidades son variables aleatorias en sí). Por el momento, no nos ocuparemos en estas violaciones al axioma de independencia.

El axioma de independencia, si bien deseable, impone una estructura muy rígida sobre las preferencias: Las curvas de indiferencia sobre loterías deben ser líneas rectas y paralelas. En la Figura 8.3 mostramos nuestro espacio de loterías y, al igual que en las secciones anteriores, podemos dibujar curvas de indiferencia. Dos puntos sobre una curva de indiferencia, e.g., L y M, son tales que $L \sim M$, esto es, el agente es indiferente entre ambas loterías. Para este ejemplo en particular, y para que los lectores puedan seguirlo, dibujé $L = (0.3, 0.6, 0.1)$ y $M = (0.3, 0.1, 0.6)$.

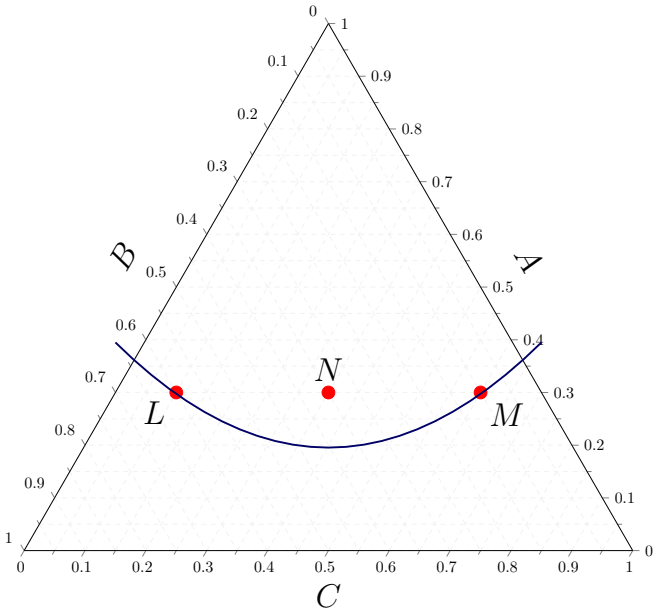


Figure 8.3: Preferencias no lineales sobre loterías

Consideremos ahora la lotería $N = \alpha L + \alpha M = (0.3, 0.35, 0.35)$, con $\alpha = 0.5$. Como $L \sim M$, si el axioma de independencia se cumple, debe ser que

$$L = \alpha L + (1-\alpha)L \sim \alpha M + (1-\alpha)L = N \qquad \Longrightarrow \qquad L \sim N$$

pero de la gráfica, notamos que $L \nsim N$, por la curvatura de las curvas de indiferencia, y lo cual es una violación al axioma de independencia. Así, el axioma de independencia implica que las preferencias sobre loterías deben ser lineales (curvas de indiferencia rectas).

Un análisis similar nos lleva a concluir también que las curvas de indiferencia tienen que ser no sólo rectas, sino rectas paralelas. Para ver esto, consideremos la Figura 8.4 en la gráfica a la izquierda, en donde tenemos dos loterías $L = (0.3, 0.6, 0.1)$ yy $M = (0.3, 0.1, 0.6)$ nuevamente, ambas sobre la misma sobre una misma curva de

[7] Machina, Mark J. 1987. "Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved." Journal of Economic Perspectives, 1 (1): 121-154. En concreto, con relación a los experimentos por Allais (1953), Morrison (1967), Raiffa (1968) y Slovic y Tversky (1974)

indiferencia (por simplicidad, la dibujo horizontal, pero en general puede tener cualquier grado de inclinación, con tal de que sean líneas rectas). Asumamos también que hay otra curva de indiferencia que que pasa por el punto $\tilde{L} = (0.5, 0.4, 0.1)$, pero no es paralela a la primera curva de indiferencia.

Ahora centrémonos en la lotería $N = (0.8, 0.1, 0.1)$.

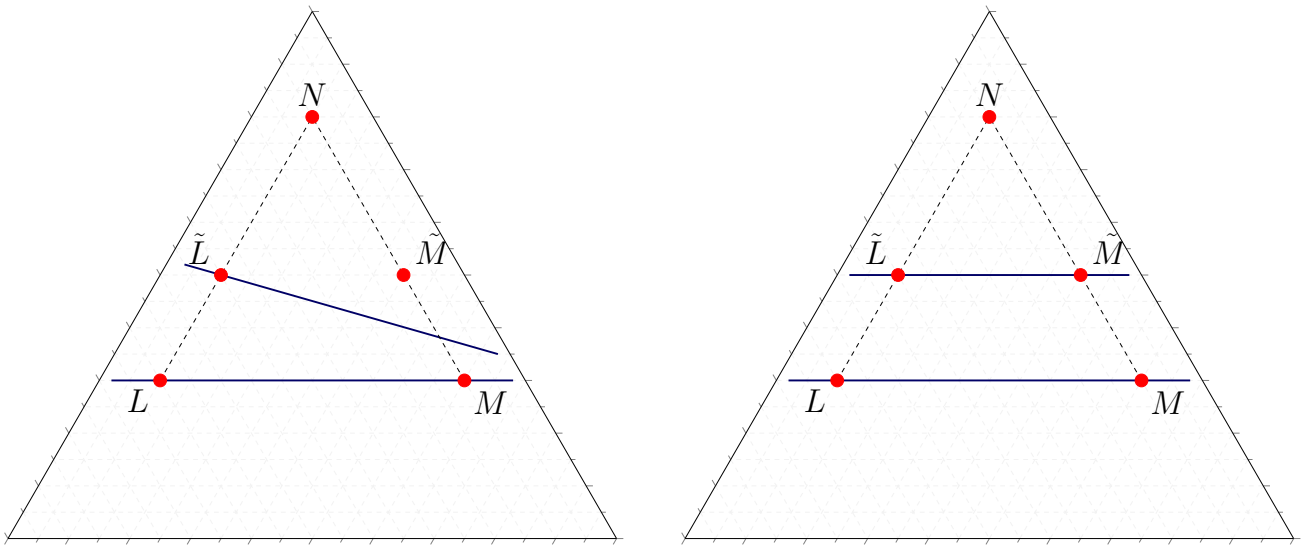


Figure 8.4: Representación gráfica de las loterías

Notamos que podemos construir $\tilde{L}$ como una combinación de L y N, en particular, si $\alpha = 0.6$:

$$\tilde{L} = \alpha L + (1-\alpha)N = 0.6L + 0.4N = (0.5, 0.4, 0.1).$$

Si combinamos M con N en la misma proporción, obtenemos:

$$\tilde{M} = \alpha M + (1-\alpha)N = 0.6M + 0.4N = (0.5, 0.1, 0.4).$$

Por el axioma de independencia, como $L \sim M$, entonces $\tilde{L} \sim \tilde{M}$. No obstante, en nuestra la figura 8.4 en la gráfica a la izquierda, notamos que $\tilde{L} \nsim \tilde{M}$, lo cual viola el axioma de independencia. Así, el axioma de independencia implica que las curvas de indiferencia deben ser rectas y paralelas. A la derecha de la misma Figura 8.4 mostramos cómo se vería la gráfica si las curvas de indiferencia fueran rectas y paralelas.

Como vimos, el axioma de independencia impone una estructura muy específica sobre la forma de las preferencias de los agentes ante la incertidumbre. Esta forma está muy relacionada con la denomindada **utilidad esperada**. Esto es, si la utilidad de los eventos A, B y C son u_A, u_B y u_C, respectivamente, entonces la utilidad esperada de la lotería $L = (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$ es:

$$\mathbb{E}[u(L)] = \pi_A u_A + \pi_B u_B + \pi_C u_C$$

Definición: La **Función de utilidad** $U : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ es de la *forma de utilidad esperada* si existe un conjunto de números $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ para cada estado del mundo, tal que para cada lotería simple $L = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \in \mathscr{L}$ para los estados del mundo $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

$$U(L) = \pi_1 u_1 + \cdots + \pi_n u_n$$

Una función de utilidad de la forma de utilidad esperada también se conoce como función de utilidad esperada von Neumann-Morgenstern (vN-M), o como función de utilidad ex ante.

Teorema de von Neuman-Morgenstern (1947): La relación de preferencias $\succeq$ sobre loterías $\mathscr{L}$ es transitiva, completa, continua y satisface el axioma de independencia si y sólo si las preferencias pueden ser representadas por una función de la forma de utilidad esperada. Esto es, a dichas preferencias se les puede asignar una utilidad "ex post" u_n a cada estado del mundo $n = 1, \ldots, N$, tal que para una lotería $L = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ y $L^{'} = (\pi_1^{'}, \ldots, \pi_n^{'})$ para los estados del mundo $C = (c_1, \ldots, c_n)$,

$$L \succeq L^{'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad U(L) = \sum_{n=1}^{N} \pi_n u_n \geq \sum_{n=1}^{n} \pi_n^{'} u_n = U(L^{'}).$$

La prueba de este teorema escapa a esta nota.

En otros cursos de economía, es muy común representar la utilidad de los agentes ante situaciones inciertas mediante una función de utilidad de la forma de utilidad esperada. Esto es, si un agente deriva cierta utilidad u_l cuando el estado de cosas l se realiza, entonces la utilidad esperada no es más que el promedio de las utilidades de cada estado de cosas, ponderado por la probabilidad de ocurrencia de cada estado de cosas. El teorema de von Neumann-Morgenstern nos indica que asumir esto es equivalente a asumir, implícitamente, que las preferencias del agente cumplen con el axioma de independencia.

Algunas propiedades de la función de utilidad esperada, cuya demostración omito, son:

1. Una función $U : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ es de la forma de utilidad esperada si y sólo si es lineal:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

2. Si una función vN-M $U : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ representa las preferencias $\succeq$ sobre $\mathscr{L}$ de un agente, entonces la función $\tilde{U} = \beta U(L) + \gamma$, donde $\beta > 0$ representa las mismas preferencias.

   Para los conceptos anteriores de teoría de la utilidad habíamos considerado la posibildiad de realizar transformaciones monótonas, señalando que representan las mismas preferencias de los agentes. En el caso de la teoría de la utilidad esperada, esto quiere decir que las funciones de utilidad sólo permiten transformaciones afines (multiplicación por un escalar positivo y suma de una constante).

8.3 Dinero y Aversión al riesgo

En ocasiones conviene pensar en u_n como la utilidad ex-post, es decir, la utilidad **cierta** cuando el agente está en el estado del mundo c_n. Esto es, mientras que $U : \mathscr{L} \to R$ es la utilidad esperada que tiene un agente frente a una lotería antes de que alguno de los estados del mundo se actualice, u_n es la utilidad que el agente recibe una vez que la incertidumbre desaparece porque se realizó el estado de cosas n. Por ejemplo, si un agente puede recibir una utilidad de $u_1 = 10$ en el estado del mundo c_1, y una utilidad $u_2 = 100$ en el estado del mundo c_2. Si ambas ocurren con probabilidad 0.5, entonces la utilidad esperada es $U = 0.5 \times 10 + 0.5 \times 100 = 55$.

Si el universo de todos los posibles estados del mundo lo denominamos como C, entonces podemos establecer una relación uno a uno entre el estado del mundo y la utilidad asociada, esto es, una función $u : C \to \mathbb{R}$, en donde $c_i \in C$ y $u_i \in \mathbb{R}$. Esto es, $u_i = u(c_i)$. Así, si el estado del mundo es una cantidad de dinero x, el agente recibirá una utilidad ex post dada por $u(x)$, a la cual denominamos también fomo la **función de utilidad Bernoulli** y denotamos en minúscula para distinguir de la función de utilidad esperada $U(L)$. Cabe enfatizar que el Teorema de vN-M no requuiere que la función de utilidad **Bernoulli** tenga una estructura determinada, como sí requiere que la tenga la función de utildad esperada. En adelante asumiré que la función de utilidad Bernoulli es continua y diferenciable; en los casos en que la función de utilidad Bernoulli sea definida sobre dinero, asumiré también que es creciente.

A manera de ejemplo, si las preferencias sobre el dinero de un agente pueden estar representadas por la función de utilidad $u_i = u(x_i) = \sqrt{x_i}$, entonces la función de utilidad vN-M está dada por:

$$U(\mathbb{L}) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \sqrt{x_i}$$

En vez de pensar en el dinero como una variable discreta ($1, $2, $3, ...), podemos pensar en el dinero como una variable continua. Asimismo, podríamos pensar en cualquier otra variable continua como aquella sobre la cual el agente deriva su utilidad (por ejemplo, la cantidad de lluvia en el año). En estos casos, la lotería estará caracterizada por una función de distribución acumulada $F(x)$ en lugar de una función de masa de probabilidad. Entonces, la función de utilidad vN-M estará dada por:[8]

$$U(F(x), x) = \int u(x) dF(x)$$

Dos ejemplos

- En este ejemplo tenemos una función de utilidad ex post caracterizada por $u(x) = \sqrt{x}$, donde x está en unidades de dinero. Asumimos que la cantidad de dinero es aleatoria y sigue una distribución uniforme entre 0 y 1 $X \sim U(0, 1)$, con función de distribución acumulada $F(x) = x$ en el soporte. La utilidad esperada está dada por:
$$U(L) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} = 0.\overline{66}$$
- Ahora asumamos que la función de utilidad ex post es la misma, pero ahora la distribución de probabilidad está dada de manera discreta, tal que $Pr[x = 0.1] = 0.5$ y $Pr[x = 0.9] = 0.5$. Entonces:
$$U(L) = 0.5 \times \sqrt{0.1} + 0.5 \times \sqrt{0.9} \approx 0.632$$

Está claro que el agente preferirá la primera lotería a la segunda, pues la utilidad esperada es mayor en la primera.

Siguiendo con el ejemplo, notemos que en ambos casos el valor esperado de x es $E[x] = 0.5$. Esto es, en promedio, este agente va a tener 0.5. Imaginemos entonces una lotería degenerada en la que el agente en lugar de obtener x con probabiliad caracterizada por la distribución $F(x)$. Si bien 0.5 es menos que el mejor escenario bajo incerticumbre (recibir $1 con la lotería uniforme $[0, 1]$, o $0.9 con la lotería discreta)(recibir 1), es mejor que el peor escenario (recibir $0 en la lotería uniforme, o $0.1 en la lotería discreta). La utilidad de esta lotería degenerada es $U(L) = u(0.5) = \sqrt{0.5} \approx 0.71 > 0.\overline{66}$.

Esto nos lleva a un punto muy importante: **la utilidad esperada no es necesariamente igual a la utilidad del dinero esperado**. La intuición en este caso es que la mera incertidumbre le genera desutilidad. Si la utilidad esperada es menor que la utilidad de la esperanza, decimos que el agente es adverso al riesgo.

Un agente es **adverso al riesgo** si para cualquier lotería con probabilidades dadas por la distribución $F(x)$, el agente prefiere recibir el valor esperado de la lotería $\int x dF(x)$ con probabilidad 1 que enfrentar directamente la lotería. Si existe una representación vN-M de las preferencias sobre loterías, y Bernoulli para las preferencias sobre dinero, un agente es adverso al riesgo si:

$$\int u(x) dF(x) \leq u\left(\int x dF(x)\right) \qquad \forall F(x)$$

Un agente es estrictamente adverso al riesgo si la desigualdad anterior es estricta.

[8] Esta notación refiere a la suma de la utilidad sobre un espacio definido por la función de distribución acumulada. Es diferente a la que muchos estudiantes estarán acostumbrados, pero permite definir la utilidad esperada para cualquier función de distribución acumulada. Sólo en caso de que la función de distribución acumulada tenga una función de distribución marginal (que sea diferenciable sobre su soporte), podemos definir la función de utilidad esperada como:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx.$$

Para casos discretos, esto se traduce en:

$$\sum \pi_i u(x_i) \leq u\left(\sum \pi_i x_i\right)$$

Y, en forma de esperanzas, ambas son equivalentes a

$$E[u(x)] \leq u(E[x])$$

De los cursos de estadística, ésto lo podemos reconocer como la **desigualdad de Jenssen**. Así, si un agente tiene una función de utilidad ex post $u(x)$ y es adverso al riesgo, entonces la función $u(x)$ es cóncava. Como nota, la desigualdad es estricta para los agentes estrictamente adversos al riesgo. En el caso de que la relación de desigualdad se invierta, hablamos de agentes propensos al riesgo; en caso de que la relación se cumpla con igualdad siempre, se habla de agentes neutrales al riesgo (en este último caso, la función de utilidad ex post es necesariamente de la forma $u(x) = ax + b$, con $a > 0$).

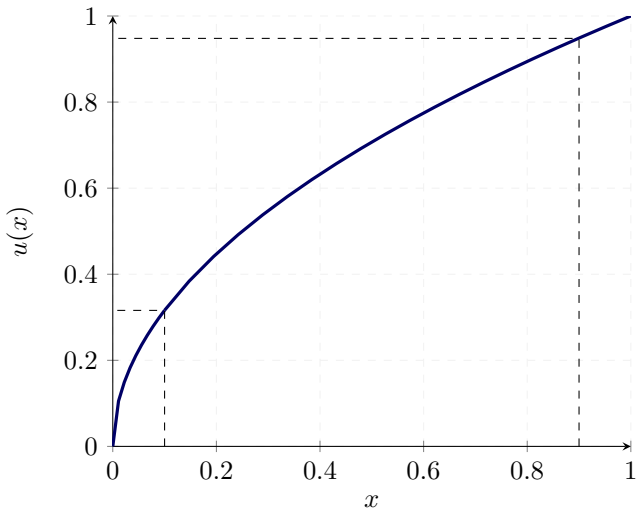


Figure 8.5: Adversidad al riesgo: función de utilidad ex post cóncava

Continuando con el ejemplo $u(x) = \sqrt{x}$, tomemos ahora el caso de la distribución discreta que mencionamos en las viñetas anteriores. Bajo esta distribución, $E[x] = 0.5(0.1)+0.5(0.9) = 0.5$, y nuevamente $u(E[x]) = 0.707 > E[u(x)]$. Dado que la función es cóncava, sabemos que esto se iba a satisfacer. En la Figura 8.5 observamos la utilidad ex post, en donde marcamos la utilidad si el agente recibe 0.1 o si recibe 0.9.

Para observar la utilidad esperada gráficamente, podemos considerar que ésta es una combinación lineal entre los puntos $(0.1, \sqrt{0.1})$ y $(0.9, \sqrt{0.9})$. Como elegimos las probabilidades esperadas igual a 0.5, la utilidad esperada la observamos en el punto medio de esta línea. En la Figura 8.6 muestro nuevamente la función de utilidad ex post en azul $(u(x) = \sqrt{x})$, y la utilidad esperada para cualquier lotería con probabilidades como la recta sólida roja. El punto superior es la utilidad que el agente recibiría si obtuviera $E[x] = 0.5$ con seguridad. El punto rojo inferior es la utilidad esperada que recibe el agente si enfrenta la lotería con probabilidades $[0.1, 0.9]$:

$$U(L, x) = E[u(x)] = 0.5 \times \sqrt{0.1} + 0.5 \times \sqrt{0.9} \approx 0.6325$$

Turnemos ahora nuestra atención al otro punto marcado con un triángulo rojo. Este punto está a la misma altura que la utilidad esperada $U(L, x) = E[u(x)]$, esto es, la misma utilidad que el agente recibiría bajo la lotería, pero este punto está sobre la utilidad ex post. Si trazamos la línea una línea horizontal de este punto a x, tenemos que $x \approx 0.4001$. Esto es:

$$u(0.4001) = \sqrt{0.4001} \approx 0.6325 \approx U(L, x) = E[u(x)]$$

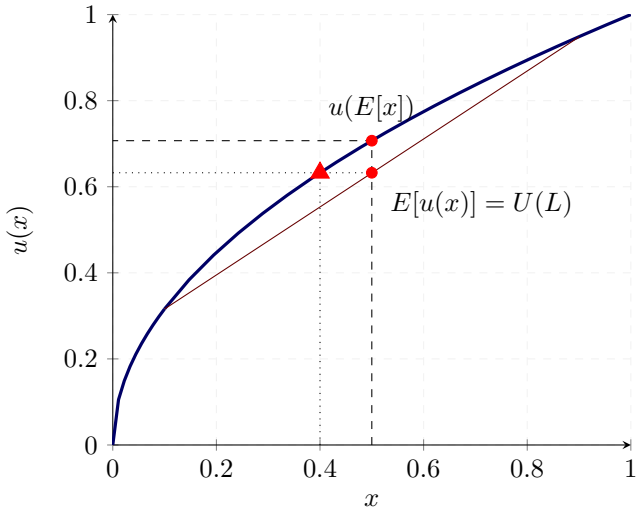


Figure 8.6: Adversidad al riesgo: función de utilidad ex post cóncava

En otras palabras, si el agente recibe \$0.4001 con certeza, su utilidad será la misma que si enfrentara la lotería de recibir \$1 con probabilidad 0.1 y \$0.9 con probabilidad 0.9. A este valor de x lo denominamos **equivalente cierto** o certidumbre equivalente.

Definición El **equivalente cierto** de L, denotado $EC(L, \succeq) \equiv x^{EC}$ es la cantidad monetaria tal que el agente está indiferente entre la lotería y este monto cierto. Si las preferencias están representadas por una función de utilidad ex post $u(x)$, entonces:

$$u(x^{EC}) = \int u(x)dF(x)$$

Para todo agente adverso al riesgo, $EC(L, \succeq) \leq E[x]$.
En el caso de los agentes adversos al riesgo, el equivalente cierto es menor que el valor esperado de la lotería:

$$EC(L, \succeq) < E[x].$$

La desigualdad se invierte para los agentes propensos al riesgo, y se cumple con igualdad para los agentes neutrales al riesgo.

La prueba escapa a esta nota, pero daremos un poco de intuición. Si un agente es adverso al riesgo, y está entre una lotería cuyo pago esperado es de \$1,000 con potencial de recibir menos, el agente estará dispuesto a aceptar un pago cierto menor de \$1,000 con tal de ahorrarse la incertidumbre. Los agentes propensos al riesgo, por el contrario, están dispuestos a pagar (o a recibir menos dinero) con tal de enfrentar la incertidumbre (pensemos en los apostadores). Los agentes neutrales al riesgo no les importa la incertidumbre, por lo que el equivalente cierto es igual al valor esperado de la lotería.

En el ejemplo anterior para, para el agente con función de utilidad ex post $u(x) = \sqrt{x}$ y la lotería dada por $L = (0.5, 0.5; 0.1, 0.9)$, el equivalente cierto satisface $\sqrt{x^{EC}} = 0.5\sqrt{0.1} + 0.5\sqrt{0.9}$. Esto es, $x^{EC} = 0.4$. Dado que el agente es adverso al riesgo, $x^{EC} < E[x]$.

Definición: Denominamos **prima de riesgo** el pago que está dispuesto a realizar un agente para desaparecer el riesgo:

$$PR(L, \succeq) = E[x] - EC(L, \succeq).$$

Una última definición que sirve para ilustrar el riesgo es la prima de probabilidad.

La **prima de probabilidad** $\pi(x, \epsilon, \succeq)$ es el aumento en la probabilidad de ganar el resultado positivo respecto de una apuesta justa (probabilidades de 0.5 para ambos resultados), tal que el agente esté indiferente entre x cierto, o una lotería con que paga $x - \epsilon$ y $x + \epsilon$, para cierta cantidad fija x y cierto número positivo ϵ:

$$u(x) = (0.5 - \pi(x, \epsilon, \succeq)) \times u(x - \epsilon) + (0.5 + \pi(x, \epsilon, \succeq)) \times u(x + \epsilon)$$

Para un agente adverso al riesgo, $\pi(x, \epsilon, \succeq) \geq 0$. Otra vez, la prueba escapa a esta nota. No obstante, podemos dar intuición. Partiendo de una cantidad cierta de \$1,000, un agente ahora enfrenta una lotería que da \$900 con probabilidad de 0.5, y \$1,100 con probabilidad de 0.5. Esto es, el valor esperado es el mismo, pero ahora hay riesgo. Un agente adverso al riesgo preferirá definitivamente la cantidad cierta. No obstante le preguntamos ahora ¿cuánto le subo la probabilidad a ganar \$1,100 para que ahora estés indiferente? Esto es la prima de probabilidad.

Para terminar con esta sección, consideremos una transformación a la riqueza de los agentes. Digamos que un agente obtiene una cantidad de dinero aleatoria x con cierta distribución, tal que $E[x] = W_0$. Es posible definir $x = W_0 + z$, en donde $E[z] = 0$. Así, se mantiene que $E[x] = W_0$. Ahora, incluyendo esta transformación en la definición de aversión al riesgo:

$$E[u(x)] \leq u(E[x]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad E[u(W_0 + z)] \leq u(W_0)$$

de donde es posible concluir que a un agente adverso al riesgo le desagradan todos los riesgos que tengan esperanza cero, independiente de su nivel inicial de riqueza, W_0.

En general nos gusta trabajar con agentes adversos al riesgo, pues es un escenario más factible. No obstasnte, podemos definir que un agente es **propenso al riesgo** si para cualquier lotería con probabilidades dadas por la distribución $F(x)$, el agente prefiere sujetarse a la lotería que recibir el valor esperado de la misma $\int x dF(x)$ con probabilidad 1. Si existe una función de utilidad ex-ante y ex-post, esto significa que:

$$\int u(x) dF(x) \geq u\left(\int x dF(x)\right) \qquad \forall F(x)$$

Similarmente, en notación de esperanzas, $E[u(x)] \geq u(E[x])$. De la desigualdad de Jenssen, un agente propenso al riesgo tiene una función cóncava. Un agente es estrictamente propenso al riesgo si la desigualdad anterior es estricta.

Asimismo, definimos a un **agente neutral al riesgo** como aquel que, para cualquier lotería con distribución $F(x)$, está indiferente entre sujetarse a la lotería y recibir el valor esperado de la misma $\int x dF(x)$ con probabilidad 1. Si existe una función de utilidad que represente sus preferencias, entonces:

$$\int u(x) dF(x) = u\left(\int x dF(x)\right) \qquad \forall F(x)$$

En notación de esperanzas, E[u(x)] = u(E[x]). De la desigualdad de Jenssen, esto quiere decir que el agente tiene una función de utilidad ex post cóncava y convexa, por lo que dicha función de utilidad es necesariamente lineal.
Un agente neutral al riesgo tiene una función de utilidad ex post de la forma:

$$u(x) = Ax + b \qquad A \in \mathbb{R}_{++}, \qquad B \in \mathbb{R}$$

8.3.1 Activos de riesgo y activos libres de riesgo

Para ejemplificar un poco la utilidad de esto, consideremos a una inversionista con riqueza inicial W_0, y desea invertirlo en activos que den cierto rendimiento. Así, decide invertir una cantidad $0 \leq \theta \leq W_0$ en un activo de riesgo, y el restante $(W_0 - \theta)$ en un activo libre de riesgo. El activo libre de riesgo tiene una tasa de retorno de $r_f > 0$ conocido, mientras que el activo con riesgo tiene una tasa de retorno $r_f + q$ con $E[q] > 0$. El ingreso de la inversionista estará dado por:

$$(W_0 - \theta)(1 + r_f) + \theta(1 + r_f + q) = W_0(1 + r_f) + \theta q$$

en donde $W_0(1+r_f)$ es cierto, y θq es estocástico. La inversionista tiene una función de utilidad Bernoulli $u(x)$, tal que $u^{'}(x) > 0$ y $u^{''}(x) < 0$. La inversionista maximiza su utilidad vN-M, o su utilidad esperada, eligiendo la cantidad que asigna al activo libre de riesgo, θ:

$$\max_{\theta} \qquad E\left[u\left(W_0(1 + r_f) + \theta q\right)\right]$$

Las condiciones de primer y segundo orden establecen que:

$$\begin{aligned} E\left[qu^{'}(W_0(1 + r_f) + \theta^* q)\right] &= 0 \\ E\left[q^2 u^{''}(W_0(1 + r_f) + \theta^* q)\right] &< 0 \end{aligned}$$

Notemos que si $\theta = 0$. Entonces, de la condición de primer orden, $u^{'}(W_0(1+r_f)) \times E[q] > 0$; esto es, cuando la inversionista tiene todo su dinero en el activo libre de riesgo, la utilidad marginal de incrementar su participación en el activo riesgoso (y consecuentemente disminuir su participación en el activo libre de riesgo) es positiva. Entonces, necesariamente $\theta^* > 0$. Este resultado, conocido como **principio de participación** es independiente del grado de aversión al riesgo, y señala que incluso los agentes adversos al riesgo asignarán parte de su riqueza a activos de riesgo.

8.3.2 Utilidad por bienes

En las secciones anteriores habíamos iniciado con preferencias por bienes y servicios. Si las preferencias sobre bienes son transitivas, completas y continuas, entonces son representables por una función de utilidad $u(x)$, en donde x representa una canasta de bienes en lugar de dinero. ¿Cómo podemos relacionar esta función de utilidad por bienes con la función de utilidad ex-post respecto de loterías?

Vamos a mezclar un poco la notación. Al igual que antes, $u(x)$ es una función de utilidad Bernoulli, o ex post, por la canasta de bienes $x \in \mathbb{R}^L_+$. Supongamos que los precios de los bienes, p, son ciertos, pero el ingreso del agente es incierta. Denotemos w_n el ingreso del agente en el estado del mundo n. Una vez que se conoce el estado del mundo, el agente maximiza su utilidad por bienes, sujeta a su restricción presupuestaria:

$$\max_{x} \qquad u(x) \qquad \text{s.t.} \qquad \sum_{i=1}^{M} p_i x_i \leq w_n$$

Del problema anterior podemos derivar la función o correspondencia de demanda $x(p, w_n)$, así como la función de utilidad indirecta $v(p, w_n) = u(x(p, w_n))$. Fijando los precios, podemos definir $\tilde{v}(w_n) \equiv v(p, w_n)$, en donde w_n es el dinero del agente en el estado del mundo n. En este sentido, $\tilde{v}(w)$ representa una función de utilidad por el dinero y puede ser utilizada como una función de utilidad ex post en el caso de incertidumbre. Así, si la distribución del

ingreso del agente está caracterizada por la función de distribución acumulada $F(w)$, la utilidad ex ante del agente está dada por:

$$\begin{aligned} U(F(w), w) &= \int \tilde{v}(w) dF(w) \\ &= \int v(p, w) dF(w) \\ &= \int u(x(p, w)) dF(w) \end{aligned}$$

La función de utilidad de un agente por dos bienes distintos está dada por $u(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1) + (1 - \alpha) \ln(x_2)$. Resolviendo el problema del consumidor obtenemos las siguientes funciones de demanda:

$$x_1(p, w_n) = \alpha \frac{w_n}{p_1} \qquad x_2(p, w_n) = (1 - \alpha) \frac{w_n}{p_2}$$

Por lo que la función de utilidad indirecta en el estado del mundo n está dada por:

$$\begin{aligned} v(p, w_n) =& \alpha \ln \left(\alpha \frac{w_n}{p_1} \right) + (1 - \alpha) \ln \left((1 - \alpha) \frac{w_n}{p_2} \right) \\ =& \ln(w_n) + \ln \left(\alpha^{\alpha} (1 - \alpha)^{1 - \alpha} \right) - \ln \left(p_1^{\alpha} p_2^{1 - \alpha} \right) \end{aligned}$$

Si la distribución del ingreso está dada por $F(w)$, entonces la utilidad ex ante o vN-M del agente está dada por:

$$U(F, w) = \int v(p, w) dF(w) = \int \ln(w_n) dF(w) + \ln \left(\alpha^{\alpha} (1 - \alpha)^{1 - \alpha} \right) - \ln \left(p_1^{\alpha} p_2^{1 - \alpha} \right)$$

en donde las últimas expresiones salen de la integral ya que $\int dF(w) = 1$.

Recordemos que anteriormente habíamos dicho que las funciones de utilidad vN-M permiten transformaciones afines. Dado que α es un parámetro fijo, y los precios p igualmente están fijos, podemos restar las expresiones fuera del integral, y representar las mismas preferencias:

$$\tilde{U}(F, w) = \int \ln(w_n) dF(w)$$

en donde podemos interpretar $\tilde{v}(w) = \ln(w)$ como una transformación válida de la utilidad Bernulli del agente, $v(w)$. Aquí quiero enfatizar que, a diferencia de las secciones anteriores donde permitimos transformaciones monótonas sobre $u(x)$, ante la incertidumbre, la función de utilidad ex post no permite cualquier transformación monótona, sino únicamente transformaciones afines.

En este problema, en particular, la función de utilidad Bernoulli $\tilde{v}(w) = \ln(w)$ es cóncava, por lo que este agente es adverso al riesgo.

8.4 Medidas de Aversión al Riesgo

Ya una vez que estamos tratando con agentes adversos al riesgo, nos interesa saber si hay agentes "más adversos al riesgo" que otros. Una propuesta podría considerar el equivalente cierto, esto es, un agente más adverso al riesgo estará dispuesto a aceptar un equivalente cierto menor para deshacerse del riesgo; similarmente, en tanto a la prima de probabilidad, un agente más adverso al riesgo transitará de una situación cierta a una con riesgo sólo si la prima sobre la probabilidad de éxito es más grande. No obstante, las medidas más utilizadas (y más simples) son los coeficcientes de aversión al riesgo de Arrow-Pratt:

Para una función de utilidad ex post $u(x)$ dos veces diferenciable, definimos al **coeficiente de aversión absoluta al riesgo** como:

$$r_A(x) = -\frac{u^{''}(x)}{u^{'}(x)}$$

y al **coeficiente de aversión relativa al riesgo** como:

$$r_R(x) = -\frac{u^{''}(x)}{u^{'}(x)}x$$

En general, el nivel de utilidad no nos interesa por sí solo, pero como hemos visto, el teorema de la utilidad esperada impone consideraciones de concaviad para el análisis de las funciones de utilidad, y la segunda derivada es una medida de concavidad: si la primera derivada nos dice la inclinación, la segunda nos dice qué tan rápido se aplana la curva. (En clases de física, habrán visto que si $x(t)$ es la posición, $\dot{x}(t)$ es la velocidad, y $\ddot{x}(t)$ es la aceleración).

En sí, la segunda derivada $u^{''}(x)$ podría ser suficiente para determinar el nivel de curvatura, e ingenuamente podríamos concluir que es suficiente para entender la aversión al riesgo. No obstante, habíamos dicho con anterioridad que una función de utilidad vN-M permite transformaciones afines, y la transformación seguirá representando las mismas preferencias. Si consideramos únicamente la segunda derivada, concluiríamos que que multiples representaciones de las mismas preferencias permiten diferentes posiciones al riesgo. Queremos evitar lo anterior, y tener una medida que no cambie ante transformaciones afines a la función de utilidad vN-M. De ahí que utilicemos los coeficientes de Arrow-Pratt. Podemos pensar en:

$$r_A(x) = -\frac{\partial \ln\left(u^{'}(x)\right)}{\partial x} \approx \frac{\Delta\% u^{'}(x)}{\Delta x}$$

como el cambio porcentual en la utilidad marginal (lo cual tiene un beneficio cuando consideramos que las decisiones se toman al margen) ante cambios en x. Una interpretación similar sigue para el coeficiente de aversión relativa al riesgo, añadiendo que éste ajusta por el nivel de riqueza x donde se está midiendo.

Dentro de todas las posibles funciones de utilidad Bernoulli, son de particular interés, por su simplicidad, las funciones que representan una aversión al riesgo, absoluta o relativa, constante ante cambios en el nivel de riqueza riqueza.

Definición: La función de utilidad que presenta una **aversión absoluta al riesgo** constante (CARA, por sus siglas en inglés), está dada por:

$$u(x) = -\frac{e^{-AW}}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad r_A(x) = A$$

Esta función es facil de manejar, pues permite condiciones de primer orden que se resuelven fácilmente. No obstante, la aversión absoluta al riesgo constante genera que la actitud frente al riesgo no cambie conforme a la riqueza aumenta. En este sentido, para un agente con una aversión constante al riesgo, sucede que apostar \$5 pesos cuando la riqueza inicial es \$10 pesos es igual que apostar \$5 pesos cuando la riqueza inicial es \$1,000 pesos, esto es, la prima de riesgo es la misma. Esto no parce ser consistente con el sentido común ni con las observaciones.

A continuación muestro cómo las preferencias de aversión absoluta al riesgo constante resultan en una prima de riesgo constante, independientemente del nivel de riqueza inicial. Denotamos el nivel de riqueza inicial como W_0, y z la variable aleatoria que, sin pérdida de generalidad, tiene una esperanza $E[z] = 0$, de tal suerte que el dinero del agente va a estar dado por $x = W_0 + z$. De la definición de Equivalente cierto:

$$-\frac{1}{A}\exp\left(-Ax^{EC}\right) = \int -\frac{1}{A}\exp\left(-Ax\right) dF(z)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x^{EC} =& -\frac{1}{A} \cdot \ln\left(\int \exp(-Ax) dF(z)\right) \\ =& W_0 - \frac{1}{A} \ln\left(\int \exp(-Az) dF(z)\right) \end{aligned}$$

Si sustituimos en la definición de prima de riesgo, nos damos cuenta que la prima de riesgo no depende del nivel de ingreso inicial W_0:

$$PR = \frac{1}{A} \ln\left(\int \exp(-Az) dF(z)\right)$$

En realidad, los agentes más ricos están dispuestos a pagar menos para eliminar ese riesgo; lo que es lo mismo, están dispuestos a pagar dicha cantidad si se tratar de eliminar un riesgo más grande. Históricamente, la riqueza de los individuos ha incrementado a tasas elevadas. En perspectiva, si la riqueza promedio de las personas en un país aumenta 3% anual, en 100 años, el ciudadano promedio sería 18 veces más rico. Si el coeficiente de aversión al riesgo promedio de un país no cambiara, eso querría decir que los individuos seguirían invirtiendo la misma cantidad (a precios constantes) en el presente que 100 años en el pasado (suponiendo que el retorno y variación en el mercado no ha cambiado). En otra medida, si un individuo en 1920 invertía el 20% de su riqueza en la bolsa, tras el incremento de su riqueza en 2022 el mismo individuo invertiría sólo el 1%.

No obstante, históricaente se ha observado que el porcentaje de la riqueza que un país invierte se mantiene constante. Entonces queremos una medida de riesgo que refleje posiciones frente a apuestas no en valor absoluto, sino relativas al nivel inicial de riqueza. De ahí la importancia del coeficiente de aversión relativa al riesgo.

Definición: La función de utilidad que presenta una **aversión relativa al riesgo constante** (CRRA, por sus siglas en inglés), está dada por:

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \implies r_R(x) = \gamma$$

Para agentes CRRA, si bien la prima de riesgo para una apuesta justa va a cambiar, ésta se mantendrá constante en relación al nivel inicial de riqueza. Llegamos a este resultado de la misma manera. Para un agente con nivel de riqueza inicial W_0 y una apuesta justa que paga z con expectativa $E[z] = 0$, tal que la riqueza final del agente está dada por $x = W_0 + z$. Un cierto equivalente para esta función satisface:

$$\frac{\left(x^{CE}\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} = \int \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dF(z)$$

$\implies$

$$x^{CE} = \left[\int (W_0 + z)^{1-\gamma} dF(z)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

No obstante, nos interesan estas cifras como porcentaje de la riqueza inicial. Dividiendo ambos lados entre W_0:

$$\frac{x^{CE}}{W_0} = \left[\int \left(1 + \frac{z}{W_0}\right)^{1-\gamma} dF(z)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Así, la prima de riesgo como porcentaje de la riqueza inicial está dada por:

$$\frac{PR}{W_0} = 1 - \left[\int \left(1 + \frac{z}{W_0}\right)^{1-\gamma} dF(z)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

la cual depende únicamente de los pagos de la apuesta como porcentaje de la riqueza inicial, z/W_0. En resumen, mientras que la aversión absoluta al riesgo permite establecer posiciones al riesgo frente a cambios absolutos, la aversión relativa al riesgo permite conocer las posiciones frente a cambios proporcionales a la riqueza inicial.

8.5 Maximización de utilidad ex ante

Un agente económico que enfrenta una lotería L es de poco interés. Si el dinero que recibe un agente es completamente aleatorio, dicho agente no tiene más que esperar a que se materialice un estado cierto de cosas, recibir el dinero correspondiente, y recibir cierta utilidad. No obstante, los agentes pueden tomar acciones para cambiar el resultado en cada estado de cosas. Como ejemplo, un productor agrícola puede elegir qué cultivos plantar, y así sus pérdidas o ganancias dependerán no sólo de si está en un buen o mal estado del mundo, sino de qué cultivos ha decidido plantar y el rendimiento respectivo en cada estado del mundo. Otro ejemplo es que un individuo podrá no cambiar sus probabilidades de tener un accidente, pero podrá cambiar cuánto deberá pagar en caso de accidente al comprar un seguro.

El probleman de un agente bajo incertidumbre consiste en maximizar su utilidad esperada (vN-M o ex ante), sujeto a ciertas restricciones. Veremos algunos ejemplos.

8.5.1 Elección de cultivos (1)

Supopngamos que existen únicamente dos estados del mundo: sequía y lluvia, con probabilidad 0.8 y 0.2, respectivamente. Un granjero con 100 hectáreas disponibles para cultivo puede elegir entre sembrar trigo y nueces. El trigo tiene un rendimiento de \$100/ha. en caso de lluvia, y de \$90/ha. en caso de sequía. Por su parte, las nueces tienen un rendimiento de \$200/ha. en caso de lluvia, y de \$70/ha. en caso de sequía. Como vemos, la opción entre sembrar trigo y sembrar nueces no es trivial, pues si bien las nueces tienen mayor rendimiento que el trigo si llueve, tienen un menor rendimiento si hay sequía. La decisión dependerá entonces de las preferencias sobre el riesgo que tenga el agente.

Suponemos que el granjero sólo puede cultivar o sólamente trigo o sólamente nueces, y adicionalmente tiene un ingreso inicial fijo dado por $W_0 = 100,000$. Finalmente, su función de utilidad está dada por:

$$u(W) = -\frac{W^{-2}}{2} \tag{8.1}$$

Notemos que $u'(W) = W^{-3} > 0$ y $u''(W) = -3W^{-4} < 0$, por lo que este individuo es adverso al riesgo. ¿Qué canasta preferirá este granjero? Primero tenemos que caracterizar las loterías y los respectivos estados de cosas. Si el granjero siembra únicamente trigo, con probabilidades $(0.8, 0.2)$, el granjero tendrá $(109,000, 110,000)$ (únicamente multiplicamos el rendimiento por hectária en cada estado de cosas por el número de hectáreas y le sumamos el ingreso inicial W_0). En caso de que el granjero siembre únicamente nueces, conp robabilidades $(0.8, 0.2)$ tendrá $(107,000, W_0 + 120,000)$. El granjero elegirá sembrar el cultivo que, ex ante, le de mayor utilidad. En el caso del trigo, la utilidad está dada por:

$$U(L_{\mathrm{T}}) = 0.8 \times \left(-\frac{1}{2}(109,000)^{-2}\right) + 0.2 \times \left(-\frac{1}{2}(110,000)^{-2}\right) = -4.1932 \times 10^{-11}$$
$$U(L_{\mathrm{N}}) = 0.8 \times \left(-\frac{1}{2}(107,000)^{-2}\right) + 0.2 \times \left(-\frac{1}{2}(120,000)^{-2}\right) = -4.1882 \times 10^{-11}$$

Como vemos, $U(L_{\mathrm{N}}) > U(L_{\mathrm{T}})$, por lo que el granjero está mejor sembrando trigo.

8.5.2 Elección de Cultivos (2)

Siguiendo con el ejemplo anterior, ahora supongamos que hay una granjera idéntica al granjero, con la misma cantidad de hectáreas, el mismo rendimiento por hectárieas, el mismo ingreso inicial, y las mismas preferencias. La única diferencia es que la granjera no tiene que elegir entre cultivar sólo trigo o sólo nueces, sino que puede dedicar una proporción α de su terreno al cultivo de nueces, y una proporción $1-\alpha$ al cultivo de trigo. De esta manera, en caso de que haya sequía (con probabilidad de 0.8), el ingreso de la granjera será:

$$W = \underbrace{100,000}_{W_0} + \underbrace{7,000\alpha}_{\text{Nueces}} + \underbrace{9,000(1-\alpha)}_{\text{Trigo}} = 109,000 - 2,000\alpha.$$

En el caso de que haya lluvia (con probabilidad 0.2), las ganancias de la granjera serán:

$$W = \underbrace{100,000}_{W_0} + \underbrace{20,000\alpha}_{\text{Nueces}} + \underbrace{10,000(1-\alpha)}_{\text{Trigo}} = 110,000 + 10,000\alpha.$$

Para cualquier α, la utilidad ex ante de la granjera estará dada por:

$$U(L_\alpha) = 0.8 \times \left(-\frac{1}{2}(109,000 - 2,000\alpha)^{-2}\right) + 0.2 \times \left(-\frac{1}{2}(110,000 + 10,000\alpha)^{-2}\right)$$

El problema de la granjera ahora coonsiste en:

$$\max_{\alpha} \qquad U(L_\alpha) \qquad \text{s.t.} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Se deja al lector confirmar, mediante las condiciones de primer y segundo orden, que el máximo ocurre cuando $\alpha \approx 0.6102$. A continuación se muestra una representación gráfica de la utilidad ex ante:

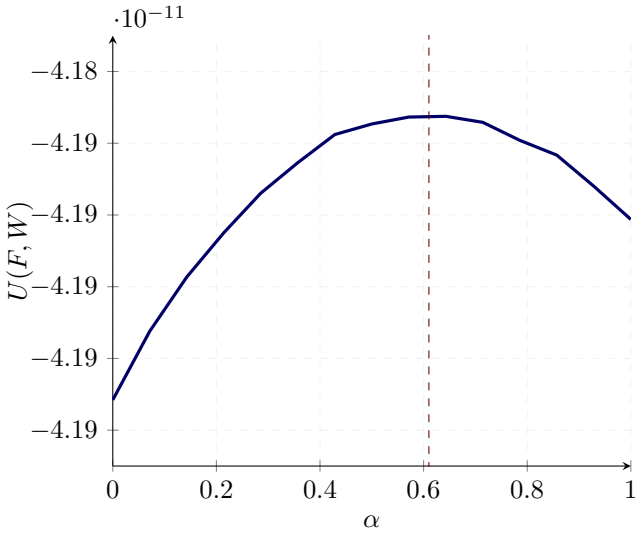


Figure 8.7: Utilidad vN-M de la granjera, para distintos valores de α.

8.5.3 El problema del seguro

Una de las aplicaciones más importantes en economía para la elección bajo incertidumbre es lo que atañe al problema del seguro. Supongamos ahora a una agente que tiene una riqueza inicial W_0, y una función de utilidad Bernoulli dada por $u(x)$. No obstante, con probabilidad π, nuestra agente incurre en una pérdida de $0 < L < W_0$. Esto es, esta agente enfrenta una lotería (y estados del mundo) dada por:

$$L = (\pi, 1-\pi) \qquad C = (W_0 - L, W_0)$$

y su utilidad vN-M está dada por:

$$U(L) = \pi u(W_0 - L) + (1-\pi)u(W_0)$$

No obstante, ahora hay una aseguradora que le ofrece cubrir una parte $I \in [0, L]$ de la pérdida L, a un precio P por unidad asegurada. Esto es, con independencia del estado del mundo, la agente va a pagar $P \cdot I$. Por simplicidad, el modelo es estático, y asumiremos que el mismo período en que se paga la cobertura es el mismo período en el que se puede actualizar el riesgo. En el "mal" estado del mundo, la agente tendrá un ingreso de:

$$\underbrace{W_0 - L}_{\text{Monto original}} + \underbrace{I}_{\text{Cobuertura}} - \underbrace{PI}_{\text{Costo del seguro}}$$

En el buen estado, la agente tendrá su ingreso W_0, pero tendrá que pagar el seguro $P \cdot I$. Dado que La agente puede decidir cualquier nivel de cobertura $I \in [0, L]$, podemos definir todas las loterías a las que la agente tiene acceso como:

$$\mathscr{L} = \{L = (\pi, 1-\pi), C_I = W_0 - L + (1-P)I, W_0 - PI\}_{I \in [0,L]}$$

La agente puede elegir la lotería que maximice su utilidad esperada (vN-M). Del lado de la aseguradora, por el momento supondremos que el único costo está dado por el costo esperado en caso de tener que cubrir el monto asegurado I en el mal estado de cosas. Entonces, los beneficios esperados están dados por:

$$E[B] = \underbrace{PI}_{\text{Ingreso}} - \underbrace{\pi I}_{\text{Costo esperado}}$$

Suponemos que la aseguradora es neutral al riesgo, por lo que maximiza sus ganancias esperadas, y no una función de las mismas. Decimos que un precio por unidad asegurada es **actuarialmente justo** si la aseguradora tiene beneficios 0 en esperanza. Esto ocurre sólamente cuando el precio es igual a la probabilidad de pérdida.

$$P^{AJ} = \pi < 1$$

El problema de maximización de la agente se convierte en:

$$\max_I \qquad \pi u\left(W_0 - L + (1-P)I\right) + (1-\pi)u\left(W_0 - PI\right)$$

Y de nuestras condiciones de primer orden:

$$\frac{u^{'}\left(W_0 - L + (1-P)I\right)}{u^{'}\left(W_0 - PI\right)} = \frac{\pi}{1-\pi} \cdot \frac{1-P}{P}$$

Empecemos suponiendo que el precio del seguro es actuarialmente justo, $P = \pi$. Entonces, el lado derecho de la ecuación anterior tiene que ser igual a 1. Como supusimos que $u^{'}(x) > 0$, esto necesariamente significa que adentro de u en el denominador y el numerador tienen que ser iguales:

$$W_0 - L + (1-\pi)I = W_0 - \pi I \qquad \Longrightarrow \qquad I = L$$

Esto es, si el precio es actuarialmente justo, la agente consume la misma cantidad en ambos períodos, algo a lo que llamamos **suavizamiento perfecto del consumo**, y es resultado directo de la función de utilidad cóncava (aversión al riesgo): las y los agentes prefieren un consumo balanceado entre estados de cosas. En general, si el precio es suficientemente bajo, el consumo estará perfectamente balanceado.

Asimismo, de la condición de optimalidad, es posible observar que si $P > \pi$, entonces tiene que ocurrir que:

$$W_0 - PI > W_0 - L + (1-P)I \qquad \Longrightarrow \qquad I < L$$

Esto es, los agentes asegurarán una cantidad menor que la pérdida total en el mal estado de cosas. El precio puede ser mayor a la probabilidad de caer en un mal estado de cosas por diversas razones. Una de ellas puede ser que existe un monopolio en la provisión de seguros. Otra razón es que las aseguradoras tienen costos adicionales a la mera pérdida esperada (trabajadores, publicidad, capita, renta, entre otros).

8.5.4 Selección Adversa

En el ejemplo anterior, si todos los agentes tienen el mismo riesgo (la misma probabilidad de un mal estado de cosas, π), entonces la aseguradora tiene un costo esperado conocido, $E[C] = \pi L$, para cada agente. Entonces, el costo total es πNL, y el costo promedio y costo marginal es igual a πL.

No obstante, en la realidad los agentes son heterogéneos en cuanto a sus posiciones frente al riesgo, en cuanto a su posibilidad de pérdida L, o a su riesgo π de incurrir en dichas pérdidas. El riesgo de las y los agentes es particularmente interesante analizar, pues una tarifa demasiado elevada puede excluir a los agentes con menor probabilidad de pérdida, dejando a los agentes más riesgosos dentro del *pool* de clientes (selección adversa). Por ejemplo, en los seguros médicos, una tarifa elevada hará que los jóvenes, en menor riesgo de padecer enfermedades, no adquieran el seguro. Si quedan sólo adultos mayores, el precio deberá elevarse para reflejar el efecto del mayor riesgo sobre los costos de la aseguradora. Pero seguir subiendo el precio seguirá excluyendo a los agentes que tengan menor riesgo, en un círculo vicioso. Este es un problema muy conocido como el *market of lemmons* (Akerloff), y refleja cómo la incertidumbre puede generar mercados incompletos (en violación al primer teorema de la econmía del Bienestar).

En un ejercicio, aislaremos el efecto de la heterogeneidad del riesgo en los agentes. Para esto, asumiremos que hay $N > 0$ agentes idénticos en su ingreso inicial, $W_{0,i} = W_0 \ \forall i = 1, \ldots, N$, en la pérdida en la que incurren en el mal estado del mundo $L_i = L \ \forall i$ tal que $0 < L < W_0$ (los individuos no pierden la totalidad de sus ingresos), y en sus preferencias, con una función de utilidad Bernoulli dada por:

$$u_i(x) = \ln(x) \qquad \forall i$$

Asimismo, los agentes van al mercado para adquirir únicamente una unidad del producto (un seguro). No obstante, los agentes difieren en su probabilidad de estar en mal estado del mundo. Esta probabilidad está dada por π_i y es conocida por el agente i, y dichas probabilidades de pérdida siguen una distribución independiente e

idéntica uniforme $\pi_i \sim U[0,1]$. Esto es, en la población hay quienes tienen una probabilidad de perder su dinero igual a 0.1, hay quienes tienen probabilidad de perder su dinero de 0.25, o 0.97.

Finalmente, a diferencia de la sección anterior, supondremos que las empresas no ofrecen niveles diferentes de covertura I a un precio por peso cubierto P, sino que la aseguradora ofrecerá un único precio P que cubre la totalidad de las pérdidas L en caso de que las o los agentes se encuentren en el mal estado del mundo. Entonces, cada agente i tiene a su disposición dos loterías:

$$\mathscr{L}_i = \begin{Bmatrix} L_i^0 = (\pi_i, 1-\pi_i) & C = (W_0 - L, W_0) \\ L_i^1 = (1) & C = (W_0 - P) \end{Bmatrix}$$

Notamos que, si el agente compra el seguro, la lotería es degenerada, pues el individuo estará totalmente cubierto ante pérdidas, y tendrá que pagar el precio por las mismas P. La cantidad máxima que un individuo i está dispuesto a pagar por la cobertura total (llamaremos a esta cantidad P_i) es aquella que lo hace indiferente entre ambas loterías, esto es, $U_i(L_i^0) = U_i(L_i^1)$. Resolvemos, y obtenemos que:

$$P_i = W_0 - (W_0 - L)^{\pi_i} (W_0)^{1-\pi_i}$$

Podemos notar que si la probabilidad de pérdida es 0 ($\pi_i = 0$), entonces el precio máximo dispuesto a pagar también es cero. Esto es, el individuo con cero riesgo no tiene ningún incentivo a adquirir un seguro. Igualmente, si la probabilida de pérdida es 1 ($\pi_i = 1$), entonces los individuos con certeza de pérdida están dispuestos a pagar hasta L. Todo esto es consistente con los hallazgos anteriores. También es posible observar que:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \pi_i} > 0 \qquad \frac{\partial^2 P_i}{\partial \pi_i^2} < 0$$

Si nuestra aseguradora pudiera discriminar perfectamente, ofrecería a cada individuo un precio igual a su disponibilidad máxima de pago. No obstante, la aseguradora no puede discriminar (ya sea porque no sabe *ex ante* qué nivel de riesgo maneja cada agente, o porque no lo tiene permitido), pero conoce la distribución de riesgo (uniforme entre 0 y 1). Entonces puede obtener para cada precio P, cuántos agentes querrán adquirir el seguro.[9] La probabilidad de que un agente adquira un seguro al precio P es la probabilidad de que la utilidad esperada sin seguro sea menor a la utilidad cierta con el seguro:

$$Pr\left[\pi_i \ln(W_0 - L) + (1-\pi_i)\ln(W_0) < \ln(W_0 - P)\right] = 1 - Pr\left[\pi_i < \frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}\right]$$

Denotemos

$$\pi^* = \frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}$$

Asimismo, recordemos que $f(\pi_i) = 1$ para $\pi_i \in [0,1]$, y $f(\pi_i) = 0$ en cualquier otro caso. Entonces nuestra probabilidad de que un agente adquiera el bien a un precio P está dada por:

$$1 - \int_0^{\pi^*} 1 dx = 1 - \frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}$$

La demanda total del mercado es la cantidad de agentes en el mismo, N, multiplicado por la probabilidad anterior:

[9] Aquí cabe enfatizar que cambios en el precio únicamente alteran la decisión sobre si comprar o no el producto, pero las y los agentes únicamente adquieren un sólo producto

$$Q^D(P) = N \times \left[1 - \frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}\right]$$

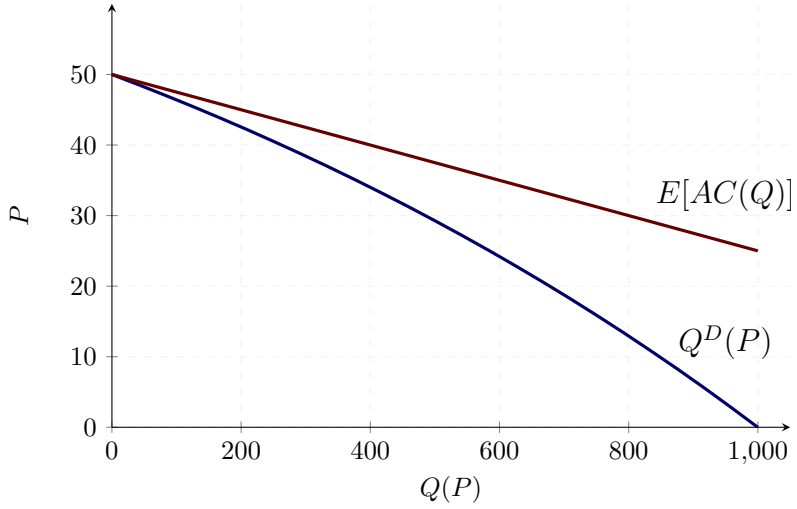


Figure 8.8: Demanda por el Seguro.

Notamos que cuando $P = 0$, entonces todos los agentes adquieren seguro, $Q(0) = N$. Igualmente, si el precio es igual a la pérdida, ningún agente adquiere el seguro, $Q(L) = 0$. La gráfica anterior muestra la forma de la demanda.[10] La gráfica del costo esperado, como función de Q, considera que, para cada Q, se atiende a los Q agentes con mayor riesgo, esto es, con riesgo $\pi \in [1 - Q/N, 1]$. Para obtener el valor esperado, recordemos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Así, la densidad de probabilidad condicional de π dado que $\pi > 1 - Q/N$ está dada por:

$$f(\pi|\pi > 1 - Q/N) = \frac{f(\pi)}{P(\pi > 1 - Q/N)} = \frac{1}{Q/N} = \frac{N}{Q}$$

Y el valor esperado de $AC(Q)$ está dado por:

$$\begin{aligned} E[AC(Q)] &= \int_{1-Q/N}^{1} \pi L * f(\pi|\pi > 1 - Q/N) d\pi_i = \frac{NL}{2Q}\left[\pi_i^2\right]_{1-Q/N}^{1} = \frac{NL}{2Q}\left[1 - \left(1 - \frac{Q}{N}\right)^2\right] \\ &= -\frac{L}{2N}Q + L \end{aligned}$$

De la Figura 8.8 podemos notar que el costo promedio de atender a Q agentes es siempre mayor al precio P al que Q agentes están dispuestos a adquirir un seguro. Esto es, la aseguradora tiene pérdidas en cada unidad vendida. Las aseguradores no tienen un costo marginal costante, puesto que el costo adicional dependerá del riesgo del agente asegurado adicional. En adición, estamos frente al tema de selección adversa, y para determinado precio P, los agentes con un riesgo mayor a π^* son los asegurados. Entremos más a detalle de lo que ocurre aquí.

Recordemos que en este caso, las aseguradoras no tienen un costo marginal, sino un costo individual de atender a cada agente. Otra forma de frasear esto es decir que el costo marginal depende del adquriente del seguro. Así, si la aseguradora fija un precio P, entonces los agentes con un mayor riesgo preferirán el seguro, y dependiendo de estos agentes dependerá el costo promedio de atenderlos. Entonces, podemos encontrar el costo promedio esperado de atender a los agentes como una función del propio precio que cobre la aseguradora. Para un idividuo i, la probabilidad de pérdida está dada por π_i, y el costo esperado para la aseguradora de dicho individuo es $E[c_i] = \pi_i L$. Recordemos que al precio P, todos los individuos con una probabilidad de daño igual o mayor a π^* contratarán un seguro. Entonces, al precio P, el costo indirecto esperado de la aseguradora está dado por:

[10] La gráfica considera $N = 1,000$, $W_0 = 100$, $L = 50$.

$$\begin{aligned}E[C(P)] =& N \times \int_{\pi^*}^{1} \pi_i L d\pi_i = \frac{NL}{2}\left[\pi_i^2\right]_{\pi^*}^{1} \\ =& \frac{NL}{2}\left[1 - \left(\frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}\right)^2\right] \\ =& \frac{NL}{2}\left[\left(1 + \frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}\right)\left(1 - \frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}\right)\right]\end{aligned}$$

Este costo no es la función de costos mínimos que obtenemos del problema de maximización del productor, puesto que depende de los precios y no de la cantidad. Notamos que de la expresión anterior podemos factorizar y obtener el costo esperado como función de la demanda $Q(P)$

$$E[C(P)] = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}\right) E[Q(P)]$$

Por lo que el costo promedio esperado cuando la aseguradora que fija un precio P es igual a:

$$E[AC(P)] \equiv \frac{E[C(P)]}{E[Q(P)]} = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{\ln(W_0) - \ln(W_0 - P)}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)}\right)$$

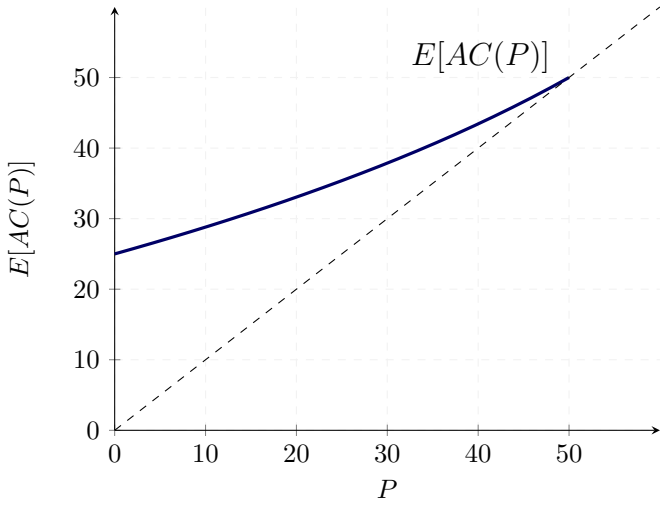


Figure 8.9: Precio y costo promedio del seguro

Este costo promedio lo graficamos junto a la demanda en la Figura 8.9. Al igual que en la Figura 8.8, notamos que para cada precio P que fije la aseguradora, el costo promedio esperado de atender a los agentes es mayor al precio P (hasta que $P = 50$, que es el precio máximo que están dispuestos a pagar cualquier agente). Al no existir un precio que permita a la aseguradora cubrir sus costos, el mercado de seguros no existe.

En sí, el que no haya un mercado no es un problema (por ejemplo, si los costos del mercado superan los beneficios, es mejor que no exista el mercado). El problema de la selección adversa es que podría haber beneficios en el mercado de existir, y por tanto es un mercado incompleto: hay gente dispuesta a vender a un precio, y gente dispuesta a comprar a dicho precio, pero no lo están haciendo.

Para obtener un óptimo social, pensemos en un monopolista de primer grado. Es posible demostrar que un monopolista de primer grado llevará al mercado al óptimo social, y sus beneficios serán iguales al excedente social en el óptimo. En este caso, el monopolista del primer grado cobrará al agente con probabilidad de pérdida π_i, el monto máximo que está dispuesto a pagar, P_i. Esto le permite al monopolista asegurar a cada agente, puesto que a cada quien va a cobrar exactamente su precio de reserva, y en el caso en concreto asumiremos que ante indiferencia,

los consumidores aceptan dicho contrato. En este caso, para el consumidor con riesgo π_i, el beneficio individual de atender a dicho consumidor está dado por:

$$P_i(\pi_i) - E[C_i] = \underbrace{\left[W_0 - (W_0 - L)^{\pi_i} (W_0)^{1-\pi_i}\right]}_{P_i} - \underbrace{\pi_i L}_{E[C_i]}$$

Entonces, el excedente total de la economía de atender a la totalidad del mercado está dado por:

$$W^* = N \times \int_0^1 \left(W_0 - (W_0 - L)^{\pi_i} (W_0)^{1-\pi_i} - \pi_i L\right) d\pi_i$$

Podemos integrar por partes y, tras algo de álgebra, obtenemos: [11]

$$W^* = W_0 - \frac{L}{\ln(W_0) - \ln(W_0 - L)} - \frac{L}{2} > 0 \qquad \forall\, 0 < L < W_0$$

Este modelo muestra cómo se puede justificar la existencia de intervención para la universalización de los seguros para lograr que se realicen los beneficios potenciales. Modelos más sofisticados de seguridad social universal consideran costos de las aseguradoras, problemas de riesgo moral (una vez asegurados, los individuos incurren en mayor riesgo), heterogeneidad en postura frente al riesgo, y demás. Aunque muchos de los argumentos a favor de la seguridad social universal son ajenos a la teoría económica (por ejemplo, equidad o justicia).

8.6 Comparando distribuciones

Una pregunta que como economistas nos hacemos es si existen criterios bajo los cuales una lotería es preferible a otra, con independencia de las preferencias de los agentes (asumiendo que tienen preferencias monótonas por el dinero). Un ejemplo absurdo es cosiderar que una lotería que paga \$1,000 con probabilidad 0.5 y \$2,000 con probabilidad 0.5 es preferible a una lotería que pague \$10 y \$20 con las mismas probabilidades. A continuación introduciremos dos métricas para comparar loterías, lo cual comparamos en términos de valor esperado y de varianza.

Definición: Una función de distribución $F(\cdot)$ domina estocásticamente en primer orden a otra distribución $G(\cdot)$ si, para cada función no decreciente $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

Esto es, una función domina estocásticamente en primer orden a otra distribución si la utilidad esperada es mayor bajo la primera que bajo la segunda. Veamos un ejemplo sencillo. La utilidad de un agente está dada por $u(x) = x$, mientras que hay dos loterías que se distribuyen $F(x) = x^2$ y $G(x) = x$, ambas en el intervalo $[0, 1]$. Entonces:

$$\int_0^1 u(x)dF(x) = \frac{2}{3}$$
$$\int_0^1 u(x)dG(x) = \frac{1}{2}$$

Esto quiere decir que $F(\cdot)$ es preferible a $G(\cdot)$ para este agente. ¿Qué podemos decir sobre las preferencias de otros agentes respecto de estas mismas dos loterías? Podemos demostrar que, en general, $F(\cdot)$ domina estocásticamente en primer orden a $G(\cdot)$, pero primero, un poco de intuición. Turnemos la vista a la gráfica en la Figura 8.10

[11] Mostrar que la siguiente expresión es positiva es algo tedioso. Una manera sencilla de hacerlo es normalizar $W_0 = 1$, y observar que la expresión tiende a 0 cuando $L \to 0$, es creciente en L, y tiende a ∞ conforme $L \to 1$.

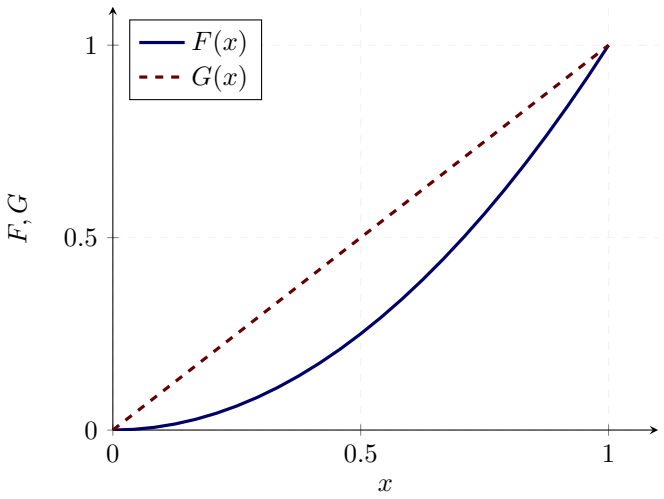


Figure 8.10: Dominancia Estocástica de primer grado

La intuición tras que $F(x)$ sea menor a $G(x)$ para que $F(x)$ domine estocásticamente en primer grado a $G(x)$ es que estamos tratando con distribuciones acumuladas. Así, cuando $G(x)$ es mayor a $F(x)$ significa que $G(x)$ acumula mayor probabilidad para valores bajos de x (los peores resultados), mientras que $F(x)$ acumula mayor probabilidad para los resultados más favorables. A manera de ejemplo, a continuación se muestran funciones de densidad margina. Podemos pensar en las gráficas de funciones de densidad como los histogramas ideales. Así, se observa que $g(x)$ agrupa más observaciones que $f(x)$ cuando x es baja, mientras que $f(x)$ agrupa más cuando x es alta.

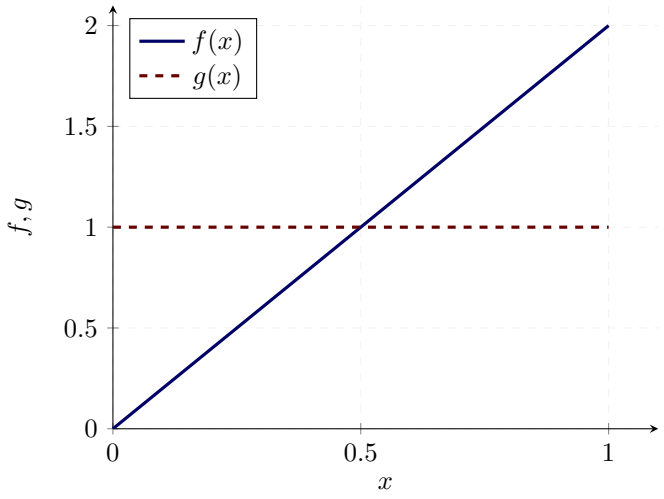


Figure 8.11: Dominancia Estocástica de primer grado

De manera más general, es posible demostrar que:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x) \leq G(x) \text{ para toda } x$$

Demostración:

Por simplicidad, asumamos que u es continua, que $F(0) = G(0) = 0$ y que

$$\lim_{x \to +\infty} u(x)[F(x) - G(x)] = 0.$$

Primero, demostremos que si $F(x) \leq G(x)$ para toda x, entonces $\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$. Integrando por partes:

$$\int u(x)dF(x) = \underbrace{[u(x)F(x)]_0^\infty}_{=u(x)} - \int u'(x)F(x)dx$$

Hacemos lo mismo para $G(x)$, de donde:

$$\int u(x)F(x) - \int u(x)G(x) = \int u'(x)[G(x) - F(x)]dx \tag{8.2}$$

Dado que $u'(x) \geq 0$, de la expresión anterior queda claro que si para toda x, $F(x) \leq G(x)$, entonces $\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$ es positiva o cero. Esto es, $u'(x)[G(x) - F(x)]$ es siempre positivo o cero, por lo que el área bajo la curva es o positivo o cero. Entonces, si $F(x) \leq G(x)$ para toda x, $\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$.

Ahora hay que demostrar el otro sentido. Por contradicción, asumamos que $\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$ para toda $u(x)$ no decreciente, pero que existe una $\tilde{x}$ tal que $F(\tilde{x}) > G(\tilde{x})$. Definamos entonces que u es una función que es sólo creciente en una vecindad alrededor de $\tilde{x}$, y 0 a la izquierda, y 1 a la derecha. Esto implica que $u'(x) > 0$ alrededor de $\tilde{x}$, y $u'(x) = 0$ en cualquier otro caso. Entonces:

$$\int u'(x)[G(x) - F(x)]dx < 0.$$

Lo anterior, ya que $u'(x) > 0$ alrededor de $\tilde{x}$, por lo que alrededor de $\tilde{x}$, la integral acumula un área negativa. Por otro lado, $u'(x) = 0$ en cualquier otro caso, por lo que la integral no acumula área. Así, debe ser que la integral anterior es negativa. No obstante, por la ecuación 8.2, esto implica que $\int u(x)dF(x) < \int u(x)dG(x)$, lo cual es una contradicción. ■.

La dominancia estocástica de primer orden relaciona las loterías en términos de la utilidad esperada. Una alternativa es relacionarlas con relación a la varianza. En particular, podríamos asumir que un agente adverso al riesgo, entre dos loterías con el mismo valor esperado, prefiere aquélla con menor varianza. A manera de ejemplo, entre una lotería que entrega \$0 con probabilidad 0.5 y \$1,000 con probabilidad 0.5, y otra que entrega \$400 con probabilidad 0.5 y \$600 con probabilidad 0.5, un agente adverso al riesgo preferirá la segunda, pues da una cantidad un tanto más segura. ¿Es posible generalizar este concepto para cualquier agente adverso al riesgo?

Una función de distribución $F(\cdot)$ domina estocásticamente en segundo orden a otra distribución $G(\cdot)$ con la misma media si para cada función cóncava no decreciente $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

La dominancia estocástica de segundo orden requiere que ambas funciones tengan el mismo valor esperado. En este sentido, están muy ligadas al concepto de las propagaciones conservadoras de la media (*mean-preserving spreads*, o MPS). Una MPS es una alteración a una variable aleatoria que no altera su valor esperado. Por ejemplo, supongamos x una variable aleatoria con distribución $F(\cdot)$ y media μ, y z otra variable aleatoria, independiente de x con distribución $H(\cdot)$, media cero y varianza positiva. Entonces:

$$E[x + z] = E[x] + E[z] = \mu$$

Si $x + z$ tiene una distribución dada por $G(\cdot)$, entonces decimos que $G(\cdot)$ es una propagación conservadora de la media de $F(\cdot)$.

A diferencia de la dominancia de primer orden, en la dominancia de segundo orden, las distribuciones tienen un mismo valor esperado. La intuición por la que decimos que $F(\cdot)$ domina a $G(\cdot)$ tiene que ver entonces con la aversión al riesgo. Notemos que la definición requiere que $u(x)$ sea una función cóncava, esto es, una función de un individuo adverso al riesgo. Si $G(\cdot)$ es una propagación conservadora de la media, esto quiere decir que en valor esperado no le agrega nada a la distribución en términos de valor esperado, pero sí conlleva mayor varianza.

Si continuamos con nuestro ejemplo en donde $G(\cdot)$ es la distribución de $x + z$, entonces la varianza de la distribución $G(\cdot)$ está dada por:

$$\begin{aligned} Var(x+z) =& E[(x+z-\mu)^2] \\ =& E[(x-\mu)^2] + E[z^2] - E[(x-\mu)z] \\ =& Var(x) + Var(z) > Var(x) \end{aligned}$$

Esto es, el valor esperado es el mismo, pero añadimos mayor varianza (incertidumbre). Sí, el agente podría ganar más dinero, pero podría, en la misma proporción, perder más dinero. Como el agente es adverso al riesgo ($u(x)$ cóncavo), el agente preferirá el mismo valor esperado con la menor varianza, esto es, preferirá $F(x)$.

9 Producción

En las secciones anteriores hemos estudiado el comportamiento de los consumidores, y cómo responden a cada nivel de precios con un nivel de consumo. En esta sección, turnamos al otro lado de la economía, la producción. En esta sección, trataremos a las empresas de una manera muy monótona, y dejaremos el lado complejo a otras disciplinas de la economía, como son la organización industrial y la economía empresarial. Por monótona, me refiero a que veremos a las empresas como unidades que maximizan una utilidad sujetos a una restricción tecnológica exógenamente dada.

A diferencia del consumidor, en donde la unidad de análisis es perfectamente identificable, a saber, el individuo, en la producción, la unidad de análisis no es tan clara. ¿Son dos empresas que comparten el mismo dueño una sola empresa o dos? ¿Dos plantas de producción de la misma empresa son dos empresas o una? ¿Qué pasa si dos empresas comparten ciertos socios en su estructura de propiedad, pero no todos? Si bien estas preguntas son interesantes y objeto de mucho estudio, por esta sección las dejaremos de lado y asumiremos que podemos perfectamente identificar a la empresa como la unidad de análisis.

Esta sección está dividida de la siguiente forma. En primer lugar, introduciremos el concepto de conjuntos de producción, esto es, el conjunto de todas las combinaciones de insumos y productos que una empresa puede transformar. Esto nos permitirá plantear los problemas de maximización de las utilidades. En la segunda parte, simplificaremos el problema para el caso de una empresa que produce un sólo producto, y veremos las propiedades de la función de producción. El programa de maximización de utilidades lo veremos en la tercera parte, junto con su programa dual, la minimización de costo: una empresa que maximiza sus utilidades necesariamente minimiza sus costos. En la cuarta parte, distinguiremos rápidamente entre el corto y el largo plazo para la empresa. Finalmente, trataremos con el problema de agregación, y veremos cómo ésta es más sencilla en la producción que en el consumo.

9.1 Conjuntos de producción

Al igual que en la sección anterior, asumiremos que existen L bienes en la economía. Un vector de producción $y = (y_1, y_2, \ldots, y_L) \in \mathbb{R}^L$ describe un nivel de producción neta. Por neta, nos referimos que ciertos bienes pueden ser negativos, esto es, son usados como insumos en la producción. Si, a manera de ejemplo, pensamos que el bien 1 es leche, el bien 2 es energía y el bien 3 es mantequilla, un vector de producción $y = (-1, -1, 1)$ indicaría que una empresa restó una unidad de leche, una unidad de energía, y añadió una unidad de mantequilla.

Es evidente que no todo vector de producció es posible. Consideramos tecnológicamente imposible que una empresa produzca cantidades positivas de todos los bienes. Siguiendo el ejemplo anterior, es imposible que una empresa produzca $y = (1, 1, 1)$, esto es, sin ningún insumo, produzca leche, energía y mantequilla. Esto violaría las leyes de la termodinámica y, francamente, si tal empresa existiera, no habría problemas de escasez, ni necesidad de economistas.

Conjunto de producción: El conjunto de producción de una empresa, Y, es el conjunto de todos los vectores de producción posibles para dicha empresa.
En ocasiones, nos será útil describir el conjunto de producción a partir de la **Función de transformación** $F(\cdot)$. Definida implícitamente como:

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^L \,:\, F(y) \leq 0\}$$

Y $F(y) = 0$ si y sólo si y está en la frontera de producción. En cursos introductorios de microeconomía se ha visto esta figura bajo la noción de la frontera de posibilidades de producción.

Para nuestra empresa anterior, siguiendo el ejemplo, $(-1, -1, 1) \in Y$, pero $(1, 1, 1) \notin Y$. Notemos que la definición de función de transformación es una desigualdad. Esto se debe a que permite "desperdicio", esto es, una empresa podría producir $y = (-1, -1, 1)$ al igual que $y' = (-1, -2, 1)$. En el primer caso, la empresa produciría una unidad de mantequilla utilizando una unidad de leche y una unidad de energía. En el segundo caso, la misma empresa produciría la misma cantidad de mantequilla, pero utilizando dos unidades de energía. Es claro que en el segundo ejemplo, la segunda unidad de energía está siendo desperdiciada.

Si $F(\cdot)$ es diferenciable, y y está en la frontera de producción, podemos definir como la tasa marginal de transformación la razón por la que una empresa transforma unidades del bien l en unidades del bien k, manteniendose en la frontera de producción.

Tasa Marginal de Transformación: Dado un vector de producción $\bar{y}$ en la frontera de producción, la tasa marginal de transformación entre los bienes l y k es:

$$MRT_{l,k}(\bar{y}) = -\frac{\partial F(\bar{y})/\partial y_l}{\partial F(\bar{y})/\partial y_k}$$

Es fácil ver cómo esto deriva de la definición de la frontera de producción. Ya que $F(\bar{y}) = 0$, queremos que cambios en los insumos no cambien $F(\cdot) = 0$:

$$\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_l} dy_l = 0$$

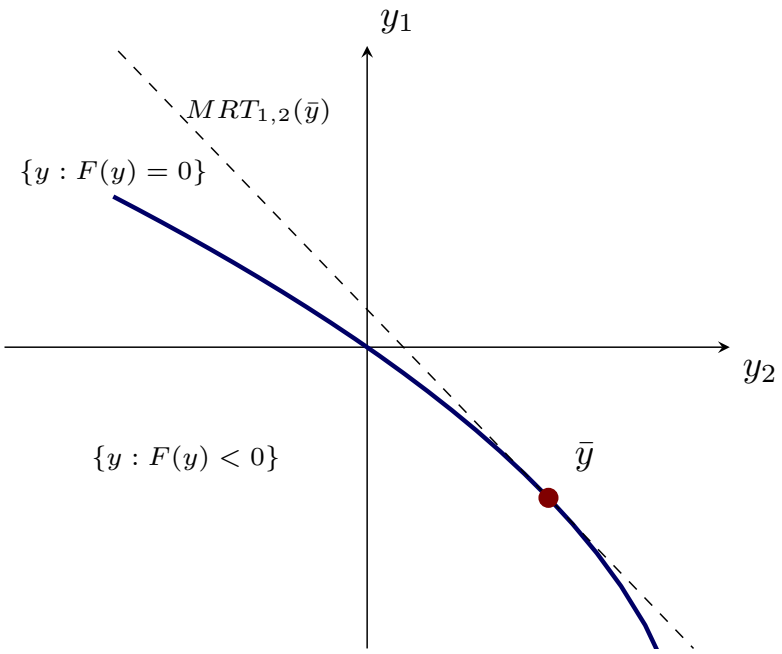


Figure 9.1: Conjunto de producción y Tasa Marginal de Transformación

Existen propiedades sobre la función de transformación que son generalmente deseables, ya sea para describir o para simplificar un problema. No obstante, el entendimiento de éstas se vuelve complicado cuando el número de bienes es grande, y permitimos múltiples insumos y productos. Por simplicidad, en adelante trataremos con el caso de una empresa que produce un único producto.

9.2 La función de producción

Nos centraremos en el caso de la empresa que produce un único producto, y_L, para lo cual utiliza los insumos $(y_1, y_2, \ldots, y_{L-1}) \leq 0$. Por convención, y para facilitar la notación, nos referiremos en adelante al producto como y o y_L cuando sea necesario diferenciar, y como $z = (-y_1, -y_2, \ldots, -y_{L-1})$ a los insumos, de tal suerte que $z_l \geq 0$ para todo insumo. Definimos la función de producción como $f : \mathbb{R}^{L-1} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto f(z) = y_L$. Esto es, la función que toma un vector de insumos z y devuelve un nivel de producción $y_L = f(z)$.

En los ejemplos subsecuentes, asumiremos que existen únicamente dos insumos, trabajo z_l y capital z_k. Al igual que en el caso de teoría del consumidor, podemos representar gráficamente la función de producción a partir

de un plano cartesiano. Fijando el nivel de producción en un punto constante y, podemos representar todas las combinaciones de insumos que generan dicho nivel de producción. Esto lo representamos en la figura 9.2 al lado izquierdo para tres niveles distintos de producción, y a dicha representación la denotamos como isocuanta. Estas se obtienen de la misma manera que obtuvimos las curvas de indiferencia en la sección 2.2.

De igual manera, podemos representar la tasa marginal de transformación como el negativo de la pendiente de la isocuanta:

$$TMT_{l,k}(\bar{z}) = -\frac{\partial f(\bar{z})/\partial z_l}{\partial f(\bar{z})/\partial z_k}$$

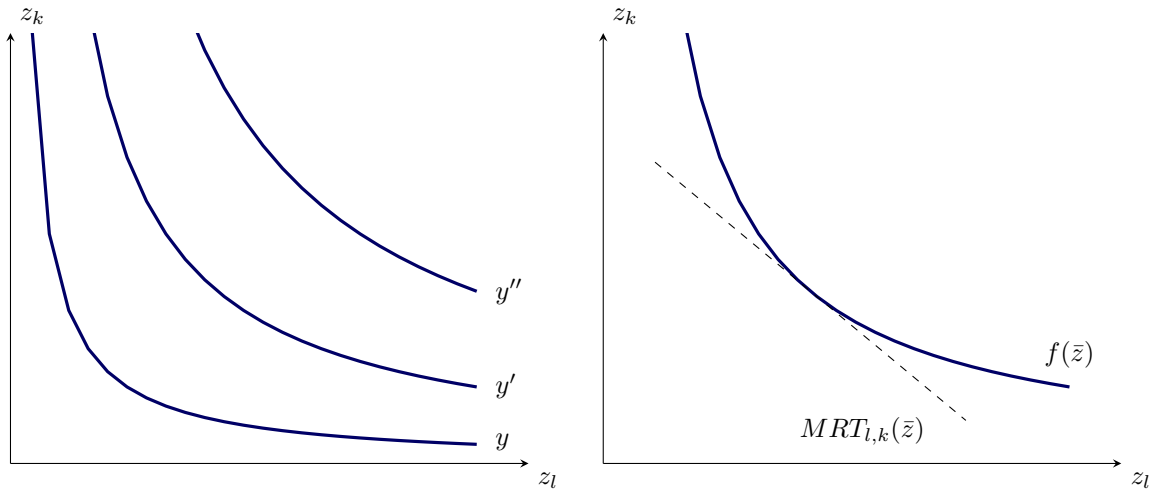


Figure 9.2: Isocuantas y Tasa Marginal de Transformación

Si bien estas nociones son parecidas a las que ya teníamos para la utilidad, hay una diferencia fundamental. En el caso de la utilidad, los niveles de utilidad son meramente ordinales (salvo el caso de preferencias con incertidumbre). En el caso de la producción, los niveles de producción son cardinales y tienen un significado real: unidades de producción. De esta manera, los conceptos de producción marginal y producción media se vuelven más importantes.

Producción Marginal: Dado un vector de insumos $\bar{z}$, la producción marginal del insumo l es:

$$PMg_l(\bar{z}) = \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_l}$$

Producción Promedio: Dado un vector de insumos $\bar{z}$, la producción promedio del insumo l es:

$$PMe_l(\bar{z}) = \frac{f(\bar{z})}{z_l}$$

Una representación gráfica es sencilla. Fijemos el nivel del insumo k, $\bar{z}_k$, y grafiquemos y como función de z_l. La pendiente de la función en un punto dado es la producción marginal, y la pendiente del rayo que parte del origen al mismo punto sobre la función es el producto medio. Una representación se da para dos funciones de producción distintas en la Figura 9.3.

Un punto interesante que resalta en dicha figura es que, en el lado izquierdo, la producción marginal es decreciente, al igual que la producción media. En el caso de la gráfica de la derecha, lo opuesto es cierto, a saber, la producción marginal y media son decrecientes.

Otro punto interesante es que, en la gráfica de la izquierda, la producción media es mayor a la producción marginal, mientras que en la gráfica de la derecha, la producción media es menor a la producción marginal. ¿Existe una relación entre la producción media y la producción marginal?

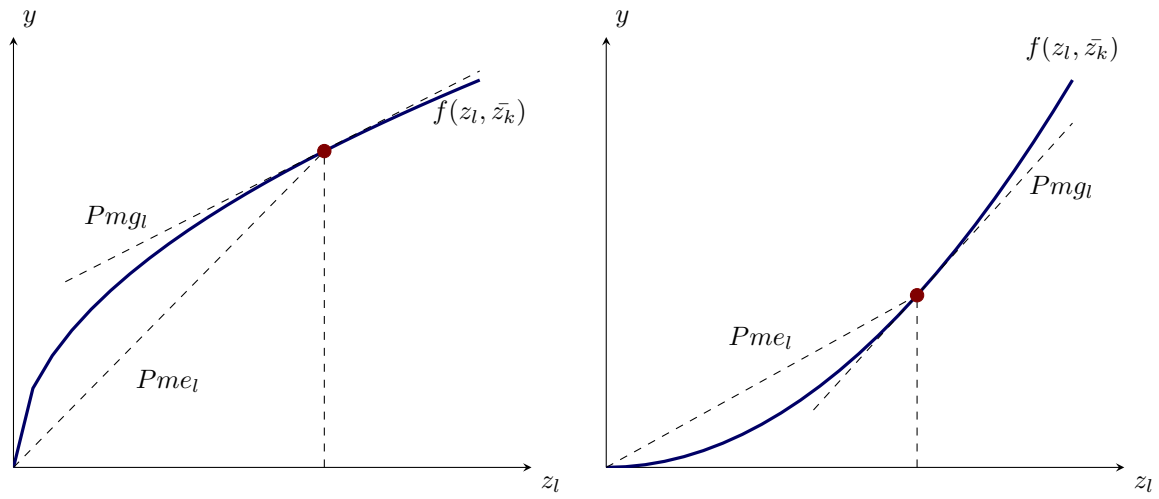


Figure 9.3: Producto Marginal y producto medio

Pensemos en un caso sencillo de un alumno con calificaciones $(8.5, 8.0, 9.0)$ y con promedio, hasta entonces, de 8.5. Si el alumno obtiene una calificación mayor a 8.5, e.g., de 9.5, ¿su promedio aumentará o disminuirá? Es claro que el promedio aumentará. De igual manera, si el alumno obtiene una calificación menor a 8.5, e.g., de 7.5, es claro que el promedio disminuirá. Esto es similar en el caso de la producción: si el producto marginal es mayor al producto medio, entonces el producto medio es creciente (gráfica derecha). Si por el contrario, el producto marginal es menor al producto medio, entonces el producto medio es decreciente (gráfica izquierda).

Esto es sencillo demostrar. Consideremos la fórmula del producto medio:

$$PMe_l(\bar{z}) = \frac{f(\bar{z})}{z_l}$$

Y tomemos la derivada con respecto de z_l. Por la regla del cociente:

$$\frac{\partial PMe_l(\bar{z})}{\partial z_l} = \frac{z_l \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_l} - f(\bar{z})}{z_l^2} = \frac{1}{z_l}\left(PMg_l(\bar{z}) - PMe_l(\bar{z})\right)$$

Asi, notamos que si el producto medio es creciente, esto es, $\frac{\partial PMe_l(\bar{z})}{\partial z_l} > 0$, entonces el producto marginal es mayor al producto medio: $PMg_l(\bar{z}) > PMe_l(\bar{z})$, y viceversa. Esto tiene una gran importancia en la teoría de la producción, pues indicará cómo una empresa produce. Si el costo promedio es decreciente, es claro que una empresa querrá producir más y más unidades para disminuir el costo promedio de suministrar el bien o servicio. Si el costo promedio es creciente, entonces la empresa querrá producir menos para disminuir el costo promedio. Antes de tocar el tema de niveles óptimos de producción, es importante relacionar primero los conceptos de rendimientos a escala.

Rendimientos a Escala: Dado un vector de insumos $\bar{z}$, y un escalar $\lambda > 1$ la función de producción $f(z)$ tiene rendimientos a escala

- crecientes si $\lambda f(\bar{z}) > f(\lambda \bar{z})$
- decrecientes si $\lambda f(\bar{z}) < f(\lambda \bar{z})$
- constantes si $\lambda f(\bar{z}) = f(\lambda \bar{z})$

Intuitivamente, lo anterior nos dice que si duplicamos todos los insumos, ¿cuánto aumenta la producción? Si la producción aumenta más del doble, entonces los insumos rinden cada vez más, por lo que decimos que la producción tiene rendimientos a escala crecientes. Si la producción aumenta menos del doble, entonces los insumos rinden cada vez menos, por lo que decimos que la producción tiene rendimientos a escala decrecientes. Y si la producción aumenta exactamente el doble, entonces los insumos rinden igual, por lo que decimos que la producción tiene rendimientos a escala constantes.

Los rendimientos a escala se miden para determinados intervalos. Así, puede que una función de producción presente rendimientos a escala crecientes para un intervalo de insumos, y rendimientos a escala decrecientes para otro intervalo de insumos. Regresaremos a este tema más adelante.

9.3 Maximización de utilidades y minimización de costos

Definimos las utilidades de la empresa como $\pi = py - w \cdot z$, en donde p es el precio del producto, y w es un vector de precios de los insumos. Claramente, tenemos que restringir el problema a que y no puede superar los niveles permitidos por la tecnología, esto es, $y \leq f(z)$.

El **problema de maximización de utilidades** para una empresa está dado por:

$$\max_{y,z} \pi = py - w \cdot z \quad \text{s.a.} \quad y \leq f(z)$$

Si la función de producción presenta rendimientos a escala decrecientes, entonces el resultado de este problema es la **función de oferta** de la empresa, $y(p, w)$, y la función de demanda de insumos, $z(p, w)$. Si bien nada nos impide tener una tecnología que permita correspondencia de demanda de insumos, asumiremos que la función de producción no permite este caso.
La función valor del problema de maximización de utilidades es la **función de beneficios** de la empresa, $\Pi(p, w)$.

Un ejemplo sencillo, supongamos que la función de producción está dada por $f(z) = z_1^{1/3} z_2^{1/3}$. Queda al lector demostrar que esta función tiene rendimientos a escala decredcientes. Entonces, el problema de maximización de utilidades está dado por:

$$\max_{y,z} \pi = py - w_1 z_1 - w_2 z_2 \quad \text{s.a.} \quad y \leq z_1^{1/3} z_2^{1/3}$$

Dado que tener $y < f(z)$ implica incurrir en costos sin tener el beneficio, entonces $y = f(z)$. Dejo al lector demostrar lo anterior. Entonces, el problema de maximización se convierte en:

$$\max_{z} \; p z_1^{1/3} z_2^{1/3} - w_1 z_1 - w_2 z_2$$

Por las CPO:

$$\frac{p}{3} \frac{z_2^{1/3}}{z_1^{2/3}} = w_1 \tag{9.1}$$

$$\frac{p}{3} \frac{z_1^{1/3}}{z_2^{2/3}} = w_2 \tag{9.2}$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores y despejando obtenemos que:

$$z_2 = \frac{w_1}{w_2} z_1$$

Sustituyendo en la ecuación 9.1 y despejando para z_1 obtenemos la demanda del insumo del bien 1:

$$z_1(p, w_1, w_2) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{w_1^2 w_2}$$

Podemos sustituir en la función para z_2 y obtener la correspondiente demanda de insumo del bien 2.

$$z_2(p, w_1, w_2) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{w_1 w_2^2}$$

Para obtener la función de oferta de la empresa, basta con sustituir las demandas de insumos en la función de producción:

$$y(p, w_1, w_2) = \left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{1}{w_1 w_2}$$

Finalmente, podemos obtener la función de beneficios de la empresa:

$$\begin{aligned}\Pi(p, w_1, w_2) &= \left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{1}{w_1 w_2} - w_1 z_1(p, w_1, w_2) - w_2 z_2(p, w_1, w_2) \\ &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{w_1 w_2}\end{aligned}$$

¿Qué ocurre si, en vez de tener rendimientos a escala decrecientes, tenemos rendimientos a escala constantes? Dejamos al lector intentar resolver el problema de maximización para la función de producción $f(z) = sqrtz_1 z_2$. Notará que no podemos hacer las sustituciones de la misma manera y el problema queda indeterminado. Por el contrario, si intentamos hacerlo para una función con rendimientos a escala crecientes, como $f(z) = z_1 z_2$, notará que el problema de maximización indica que en el óptimo, la empresa produce cero.

Lo anterior representa un problema. No obstante, queremos dar un análisis cualitativo a una empresa con dichas funciones de producción, y decir algo sobre la oferta de bienes y demanda de insumos en caso de que queramos proveer del bien o servicio, pese a que ocasione pérdidas. Para ello, necesitamos un problema dual, esto es, el problema de minimización de costos.

El **problema de minimización de costos** para una empresa es el problema dual a la maximización de beneficios y está dado por:

$$\min_z w \cdot z \quad \text{s.a. } f(z) \geq y$$

Los argumentos que minimizan la función objetivo son las **funciones de demandas contingentes de insumos**, $\hat{z}(y, w)$, y la fución valor la denotaremos como la función de **costos** de la empresa, $C(y, w)$.

Partiendo del mismo ejemplo anterior, el problema de minimización de costos está dado por:

$$\min_z w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{s.a. } z_1^{1/3} z_2^{1/3} \geq y$$

Ahora requerimos de las condiciones de Kuhn-Tucker, asumindo ya una solución interior:

$$w_1 - \lambda \frac{z_2^{1/3}}{3 z_1^{2/3}} = 0 \tag{9.3}$$

$$w_2 - \lambda \frac{z_1^{1/3}}{3 z_2^{2/3}} = 0 \tag{9.4}$$

$$\lambda \left(z_1^{1/3} z_2^{1/3} - y \right) = 0 \tag{9.5}$$

Queda al lector demostrar que la restricción se cumple con igualdad. Entonces, combinando las primeras dos ecuaciones:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

Despejando para z_2 y sustituyendo en la restricción, obtenemos la demanda contingente del insumo 1:

$$\hat{z}_1(y, w_1, w_2) = y^{3/2} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{1/2}$$

Y la demanda contingente del insumo 2:

$$\hat{z}_2(y, w_1, w_2) = y^{3/2} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{1/2}$$

Finalmente, en la función valor, obtenemos la función de costos de la empresa:

$$C(y, w_1, w_2) = 2y^{3/2} \sqrt{w_1 w_2}$$

Notamos que este problema es idéntico al de minimización de gastos, sujeto a un nivel de utilidad, que vimos en la sección 5. Por tal motivo, omito las propiedades de las funciones de demanda contingentes, las cuales son análogas a las propiedades dadas en la sección 5.2. De igual manera, omitiré las propiedades de la función de costos, las cuales son análogas a las propiedades dadas en la sección 5.3.1. Finalmente, el Lema de Shephard es aplicable, por lo que las demandas contingentes pueden ser expresadas como las derivadas de la función de costos con respecto al insumo respectivo.

A continuación, relacionaremos varios conceptos de la función de costos.

Costos Marginales: Dado un nivel de producción y, los costos marginales de producción de la empresa son:

$$CMg(y, w) = \frac{\partial C(y, w)}{\partial y} = \lambda$$

Costos Promedio: Dado un nivel de producción y, los costos promedio de producción de la empresa son:

$$CMe(y, w) = \frac{C(y, w)}{y}$$

Un tema interesante aquí es si existe una relación entre los rendimientos a escala y los costos de la empresa.

Relación entre rendimientos a escala y costos:

- Si a función de producción tiene rendimientos a escala crecientes, los costos medios de producción son decrecientes.
- Si a función de producción tiene rendimientos a escala constantes, los costos medios de producción son constantes.
- Si a función de producción tiene rendimientos a escala decrecientes, los costos medios de producción son crecientes.

Demostraremos sólo el primer caso, el resto queda como ejercicio, aunque son análogos. Como es una afirmación del tipo si y sólo si, debemos demostrar dos implicaciones.

Primero, supongamos que los rendimientos a escala son crecientes. Entonces:

$$f(\lambda z) > \lambda f(z) > f(z) \equiv y$$

Dado que los costos son no decrecientes en el nivel de producción, entonces:

$$\lambda C(f(z), w) \geq C(f(\lambda z), w) > C(\lambda f(z), w)$$

Lo anterior, ya que duplicar los insumos no puede ser más barato que aumentar los costos lo suficiente para duplicar la producción. De la ecuación anterior, ignorando el término de en medio, obtenemos que:

$$\frac{\lambda C(y, w)}{\lambda f(z)} > \frac{C(\lambda f(z), w)}{\lambda f(z)}$$

De donde $CMe(y, w) > CMe(\lambda y, w)$.

Un tema que es de mayor interés es la interpretación del problema de la envolvente. En particular, la derivada de la función de costos mínimos con respecto al nivel de producción y es igual al multiplicador de Lagrange. Esto es, λ en el problema de minimización de costos de la empresa tiene la interpretación de los costos marginales de producción. De los cursos introductorios de economía, los alumnos recordarán que en el equilibrio competitivo, el precio iguala al costo marginal. Algo interesante de notar aquí es que si el precio iguala al costo marginal, mismo que iguala a λ por el teorema de la envolvente, entonces las ecuaciones 9.3 y 9.4 son equivalentes a las ecuaciones 9.1 y 9.2.

Una vez que tenemos nuestra función de costos, es sencillo obtener la función de oferta:

El **Problema de maximización de utilidades** para la empresa con función de costos $C(y, w)$ está dado por:

$$\max_y \ py - C(y, w)$$

El argumento que maximiza la función objetivo es la **función de oferta**, $y(p, w)$, y la función valor la denotaremos como la **función de beneficios** de la empresa, $\Pi(p, w)$.

Es fácil demostrar que el problema anterior es equivalente al de maximización de utilidades original. Lo anterior, ya que si fijamos y, entonces el problema de la empresa original sería

$$\max_z \ py - w \cdot z \quad \text{s.a.} \quad y \leq f(z)$$

Dado que fijamos y, py es una constante en el problema de maximización, por lo que lo que podemos ignorar el término. Entonces, el problema se convierte en:

$$\max_z \ -w \cdot z \quad \text{s.a.} \quad y \leq f(z)$$

El problema anterior es equivalente al problema de minimización de costos. Regresando al ejemplo anterior, la maximización de utilidades con función de costos se convierte en el problema:

$$\max_y \ py - 2y^{3/2}\sqrt{w_1 w_2}$$

Por las CPO, obtenemos que el precio iguala al costo marginal:

$$p = 3y^{1/2}\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$$

Y despejando para y obtenemos la función de oferta de la empresa:

$$y(p, w_1, w_2) = \left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{w_1}{w_2}$$

Y notamos que esta función es idéntica a la función de oferta obtenida en la ecuación 9.3. Las funciones incondicionadas de insumos las podemos obtener simplemente sustituyendo la función de oferta en las funciones de demanda contingente de insumos. Queda esto como ejercicio para el lector. Nuevamente, la función de beneficios de la empresa es simplemente el valor de la función de oferta en la función de costos.

¿Qué hay de la demanda de insumos? El problema de minimización de costos nos dio como resultado la función de demanda contingente de insumos, $\hat{z}(y, w)$; esto es, contingente al nivel de producción. La manera de obtener la función de demanda de insumos no contingente, esto es, que dependa únicamente de los precios, es sencilla. Por ser problemas duales la minimización de costos y la maximización de utilidad, entonces:

$$z(p, w) = \hat{z}(y(p, w), w) \tag{9.6}$$

Esto es, la demanda de insumos es igual a la demanda contingente de insumos, pero evaluada en la función de oferta. Este resultado es sencillo de demostrar, y se debe a que podemos partir el problema de maximización de utilidades en dos partes: primero la minimización de costos, y después la maximización de utilidades:

$$\max_{y,z} \{py - w \cdot z \quad \text{s.a.} \quad y \leq f(z)\} = \max_{y} \left\{ py + \{\max_{z} -w \cdot z \text{ s.a. } f(z) \geq y\} \quad \text{s.a.} \quad y \leq f(z) \right\}$$

Entonces, del lado de los argumentos, basta con obtener primero $\hat{z}(y, w)$, y después sustituir en la función de oferta para obtener $z(p, w)$.

Lema de Hotelling: Si la función de producción es estríctamente cóncava, y doblemente diferenciable, entonces $y(p, w)$ es única y es diferenciable en precios del producto y de los insumos. Entonces:

$$\frac{\partial \Pi(p,w)}{\partial p} = y(p,w) \qquad \nabla_w \Pi(p,w) = -z(p,w)$$

Esto es similar a la Identidad de Roy y al Lema de Shephard. Lo podemos demostrar utilizando el teorema de la envolvente.

Propiedades de la función de beneficios de la empresa:

- $\Pi(p, w)$ es homogénea de grado uno en precios del producto y de los insumos.
- $\Pi(p, w)$ es convexa en el precio del producto p, y cóncava en los precios de los insumos. (Demostrar utilizando el Lema de Hotelling y las condiciones de segundo orden al problema de maximización)
- No decreciente en el precio del producto, y no creciente en los precios de los insumos (fácil de demostrar utilizando el Lema de Hotelling y las condiciones de segundo orden).

Propiedades de la función de oferta.

- $y(p, w)$ es homogénea de grado cero en precios del producto y de los insumos.
- Si $f(z)$ es cóncava, enotnces $y(p, w)$ es convexa; si $f(z)$ es estríctamente cóncava, entonces $y(p, w)$ es única para cada nivel de precios del producto y de los insumos (función de oferta en vez de correspondencia).
- **Ley de la oferta**: la función de oferta es no decreciente en el precio del producto, y no creciente en los precios de los insumos. Esto se demuestra fácilmente de la convexidad de la función de beneficios $\Pi(p, w)$ y el lema de Hotelling.

Un último tema antes de avanzar. En el tema del consumidor, vimos la ecuación de Slutsky igualando los problemas duales de maximización de utilidad y de minimización del gasto. Una de las conclusiones es que la Ley de la Demanda sólo aplicaba para la demanda compensada, pero cabía la posibilidad de que para la demanda no compensada (Marshaliana), la cantidad demandada se incrementara con el precio. ¿Podemos encontrar un resultado similar en el caso de las demandas de insumos por parte de las empresas? Retomemos la ecuación 9.6 y derivemos con respecto al precio del producto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_l}{\partial w_l} =& \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w_l} + \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial w_l} = \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial y}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial p \partial w_l} + \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial w_l} \\ =& \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial y}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_l \partial p} + \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial w_l} = -\frac{\partial \hat{z}_l}{\partial y}\frac{\partial z_l}{\partial p} + \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial w_l} \end{aligned} \tag{9.7}$$

La primera igualdad es solo la regla de la cadena aplicada a la ecuación 9.6. La segunda igualdad es el Lema de Hotelling aplicado a la oferta y, y la tercera igualdad es el cambio de orden de las derivadas por el teorema de Young. La última ecuación es nuevamente el Lema de Hotteling aplicado a la demanda de insumos. Retomemos

nuevamente la ecuación 9.6, pero esta vez derivemos respecto al precio del producto:

$$\frac{\partial z_l}{\partial p} = \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}$$

Y sustituimos en la ecuación 9.7:

$$\frac{\partial z_l}{\partial w_l} = -\frac{\partial \hat{z}_l}{\partial y}\frac{\partial z_l}{\partial p} + \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial w_l} = -\left(\frac{\partial \hat{z}_l}{\partial w_l}\right)^2 \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial \hat{z}_l}{\partial w_l} \leq 0$$

La desigualdad resulta de la ley de la oferta ($\partial y/\partial p \geq 0$) y la ley de la demanda contingente de insumos ($\partial \hat{z}_l/\partial w_l \leq 0$). A diferencia de los bienes de los consumidores, en los insumos de las empresas la demanda de insumos no compensada es decreciente en el precio del insumo, o cuando menos no creciente.

10 Equilibrio General

En las secciones anteriores hemos analizado el comportamiento de los consumidores y, en menor medida, el de los productores, siempre por separado. Uno de los supuestos fundamentales al análisis anterior es que los agentes toman los precios como exógenamente dados. A este supuesto se le conoce como **conducta competitiva**. En esta sección, continuaremos con el mismo supuesto de conducta competitiva, pero ahora analizaremos la interacción entre consumidores y productores en un contexto de equilibrio general. El resultado será no únicamente la determinación de cantidades para productores y consumidores, sino también la determinación de precios tales que la demanda sea igual a la oferta en todos los mercados.

Para lo anterior, comenzaremos primero con el modelo más sencillo que es el de una economía de intercambio puro en donde no hay producción. Esto nos permitirá introducir las nociones de equilibrio competitivo, así como las herramientas gráficas que nos permiten analizar estas interacciones. Posteriormente, pasaremos a un modelo de equilibrio general en donde se incluye la producción.

10.1 Equilibrio Competitivo en una Economía de Intercambio Puro

Consideremos una economía en donde existen L bienes posibles, mismos que denotaremos con el subíndice $l \in \{1, 2, \ldots, L\}$. Supondremos que hay I individuos en esta economía, mismos que denotaremos con el supraíndice $i \in \{1, 2, \ldots, I\}$. Supondremos que cada individuo tiene preferencias representables por una función de utilidad $u^i(x)$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_L)$ es un vector de consumo de bienes. Supondremos que las funciones de utilidad son continuas y cuasicóncavas, aunque no necesariamente diferenciables.

Cada individuo i tiene una dotación inicial de bienes $\omega^i = (\omega_1^i, \omega_2^i, \ldots, \omega_L^i)$, donde ω_l^i es la cantidad del bien l que tiene el individuo i. A manera de ejemplo, podemos imaginar que el agente i es un agricultor que cada día se levanta con 10 unidades de maíz, 5 unidades de trigo y 3 unidades de arroz. Entonces, la dotación inicial del agricultor sería $\omega^i = (10, 5, 3)$. Esta dotación inicial es exógena y en nuestro modelo es un parámetro que no depende de las decisiones del agente. Asimismo, cada individuo i enfrenta un vector de precios $p = (p_1, p_2, \ldots, p_L)$, donde p_l es el precio del bien l. Importantemente, los precios son los mismos para todos los individuos, por lo que no existe un supraíndice i en éstos.

Hasta ahora, esta situación es parecida a la que analizamos en la sección 4, aunque cambiando la notación ligeramente para permitir la introducción de más agentes. Al igual que en la sección 4, y, en general, a toda las secciones referentes al consumidor, los agentes maximizarán su nivel de utilidad sujetos a la restricción presupuestaria:

$$\max_{x^i} \; u^i(x^i) \text{ s.a. } p \cdot x^i \leq p \cdot \omega^i,$$

Para determinado nivel de precios p, un agente podrá querer consumir más que su dotación inicial para cierto bien, en cuyo caso deberá comprarlo a otro agente que esté dispuesto a venderlo. Decimos que la economía está en equilibrio si para todos los bienes, la cantidad demandada por los agentes es igual a la cantidad ofrecida que, en este caso, es la dotación agregada de la economía.

Definición de Equilibrio Competitivo: Un equilibrio competitivo en una economía de intercambio puro es un conjunto de precios p^* y un conjunto de vectores de consumo x^{i*} para cada individuo i tal que:

1. cada agente i maximiza su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria:

$$x^i(p, \omega^i) = \arg\max_{x} \; u^i(x) \text{ s.a. } p^* \cdot x \leq p \cdot \omega^i,$$

2. los mercados se vacían:

$$\sum_{i=1}^{I} x^i(p, \omega^i) = \sum_{i=1}^{I} \omega^i.$$

La primera condición es la de racionalidad de los agentes: para cada nivel de precios, los agentes deciden la canasta que prefieren respecto de todas las otras canastas factibles. La segunda condición es la de equilibrio de

mercado, y refleja la importancia de los precios. Si el precio de un bien es muy bajo, los agentes querrán comprar más unidades de ese bien, incluso más allá de la cantidad que existe en el mercado. Esto se conoce como exceso de demanda. Por otro lado, si el precio de un bien es muy alto, los agentes querrán vender más unidades de ese bien, incluso más allá de la cantidad que otros consumidores están dispuestos a comprar. Esto se conoce como exceso de oferta. Así, los precios tienen un doble rol: por un lado, agregan información sobre la escasez relativa de los bienes, y por otro, coordinan las decisiones de los agentes de tal manera que no exista exceso de demanda ni exceso de oferta.

Veamos un ejemplo sencillo con dos bienes y dos agentes, cuyas funciones de utilidad están dadas por:

$$u^1(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad \text{y} \quad u^2(x_1, x_2) = x_1^\beta x_2^{1-\beta},$$

donde $\alpha, \beta \in (0, 1)$. La primera condición del equilibrio general nos dice que:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \arg\max_x \; x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \text{ s.a. } p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1 = \begin{pmatrix} \alpha\dfrac{p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1}{p_1} \\ (1-\alpha)\dfrac{p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1}{p_2} \end{pmatrix}. \tag{10.1}$$

Asimismo,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \arg\max_x \; x_1^\beta x_2^{1-\beta} \text{ s.a. } p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2 = \begin{pmatrix} \beta\dfrac{p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2}{p_1} \\ (1-\beta)\dfrac{p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2}{p_2} \end{pmatrix}. \tag{10.2}$$

La segunda condición nos indica que los mercados se vacían, esto es:

$$x_1^1 + x_1^2 = \omega_1^1 + \omega_1^2, \tag{10.3}$$
$$x_2^1 + x_2^2 = \omega_2^1 + \omega_2^2. \tag{10.4}$$

Así, tenemos un sistema de 6 ecuaciones y 6 incógnitas: $x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, p_1, p_2$, por lo que debería existir una solución única. ¿O no? Un problema que surge es que este sistema no es independiente, por lo que tenemos una ecuación redundante. Retomemos el problema del primer consumidor. Dado que las funciones de utilidad son monótonas, satisfacen la "Ley de Walrás" como la vimos en la sección 3.3. Entonces, sabemos que los agentes agotan su ingreso en equilibrio:

$$p_1x_1^1 + p_2x_2^1 = p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1$$
$$p_1x_1^2 + p_2x_2^2 = p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2.$$

Esto no es más que un resultado de la maximización de utilidad. Si sumamos estas dos ecuaciones, entonces:

$$p_1(x_1^1 + x_1^2) + p_2(x_2^1 + x_2^2) = p_1(\omega_1^1 + \omega_1^2) + p_2(\omega_2^1 + \omega_2^2), \tag{10.5}$$

y reordenando términos:

$$p_1(x_1^1 + x_1^2 - \omega_1^1 - \omega_1^2) + p_2(x_2^1 + x_2^2 - \omega_2^1 - \omega_2^2) = 0.$$

Ahora, supongamos que la condición 10.3 se cumple, entonces:

$$x_1^1 + x_1^2 - \omega_1^1 - \omega_1^2 = 0,$$

y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$p_2(x_2^1 + x_2^2 - \omega_2^1 - \omega_2^2) = 0.$$

Por ahora, supongamos que $p_2 > 0$ Entonces, necesariamente:

$$x_2^1 + x_2^2 = \omega_2^1 + \omega_2^2,$$

Esto es, si la condición 10.3 se cumple, entonces la condición 10.4 también se cumple necesariamente, por lo que una de estas dos condiciones es redundante. Es ocurre independientemente del número de bienes y de agentes en la economía: una condición de vaciado siempre va a ser redundante.

Con anterioridad habíamos señalado que la Ley de Walrás era más bien un resultado de equilibrio general. Ahora podemos dar una definición más general de la Ley de Walrás.

Ley de Walrás: Supongamos que:

- Para todos los agentes i, $x^i \in \arg\max_x \{u^i(x) \text{ s.a. } p \cdot x \leq p \cdot \omega^i\}$.
- Para todos los bienes $l = 1, 2, \ldots, L-1$, $\sum_{i=1}^{I} x_l^i = \sum_{i=1}^{I} \omega_l^i$ (esto es, $L-1$ mercados están en equilibrio).
- u^i es localmente no saturada para todo i, y estrictamente monótona para al menos un agente i.

Entonces:

1. $p \gg 0$, esto es, $p_l > 0$ para todo $l = 1, 2, \ldots, L$.
2. Para toda i, $p \cdot x^i = p \cdot \omega^i$.
3. $\sum_{i=1}^{I} x_L^i = \sum_{i=1}^{I} \omega_L^i$, esto es, el L-ésimo mercado también está en equilibrio.
4. Para toda $\lambda > 0$, si $\left(\lambda p, \{x^i\}_{i=1}^{I}\right)$ es un equilibrio competitivo, entonces $\left(\lambda p, \{x^i\}_{i=1}^{I}\right)$ también es un equilibrio competitivo.

Demostración:

1. Por contradicción y sin pérdida de generalidad, supongamos que $\left(\lambda p, \{x^i\}_{i=1}^{I}\right)$ es un equilibrio competitivo y que $p_1 \leq 0$. Denotemos $y = x^1 + (1, 0, \ldots, 0)$. Entonces $p \cdot y = p \cdot x^1 + p_1 \leq p \cdot \omega^1$. Esto es, comprar una unidad adicional del bien 1 es factible. Adicionalmente, por monotonicidad estricta, $u^1(y) > u^1(x^1)$, lo que contradice la maximización de utilidad.
2. Esto es tal cual lo señalado en la sección 3.3.
3. Del punto anterior, si sumamos las restricciones presupuestales como lo hicimos en la ecuación 10.5, entonces:

$$\sum_i \sum_l p_l x_l^i = \sum_i \sum_l p_l \omega_l^i,$$

   Podemos reordenar términos y agruparlos por bienes:

$$\sum_l p_l \sum_i x_l^i = \sum_l p_l \sum_i \omega_l^i, \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_l p_l \sum_i (x_l^i - \omega_l^i) = 0.$$

   Pero el segundo supuesto de la Ley de Walrás es que los primeros $L-1$ mercados están en equilibrio. Entonces $\sum_i (x_l^i - \omega_l^i) = 0$ para $l = 1, 2, \ldots, L-1$. Por lo que necesariamente:

$$p_L \sum_i (x_L^i - \omega_L^i) = 0,$$

   y como $p_L > 0$ porque demostramos en la primera parte que los precios son positivos, entonces necesariamente $\sum_i (x_L^i - \omega_L^i) = 0$. Esto es, el mercado L también está en equilibrio.
4. Esto se debe a que el conjunto presupuestal de los agentes no cambia: $\{x : p \cdot x \leq p \cdot \omega^i\} = \{x : \lambda p \cdot x \leq \lambda p \cdot \omega^i\}$.

Lo anterior nos dice que el sistema de equilibrio general tiene una ecuación redundante. Esto no significa que no podamos resolver el sistema. El cuarto punto de la ley de Walrás nos dice la multiplicidad de soluciones que pueda surgir de esta dependencia lineal se refleja en la multiplicidad de precios, pero no de cantidades. Para evitar esta ambigüedad en los precios, podemos normalizar los precios. Normalizaciones comunes suelen ser:

- Simplex: $\Delta = \{p \in \mathbb{R}^L_{++} : \sum_l p_l = 1\}$.
- Círculo unitario: $S = \{p \in \mathbb{R}^L_{++} : \sum_l p_l^2 = 1\}$.
- Relatividad del bien i: $p_i = 1$.

Dependiendo de lo que intentemos hacer, distintas normalizaciones permiten cálculos más sencillos. Por simplicidad, en adelante trabajaremos con la normalización de relatividad de un bien, esto es, $p_1 = 1$.

Regresando al ejemplo anterior con las funciones de utilidad Cobb-Douglas, normalizamos $p_1 = 1$. Sustituimos las ecuaciones de demanda 10.1 y 10.2 en la ecuaciones de vaciado 10.3 para obtener:

$$x_1^1 + x_1^2 = \alpha(\omega_1^1 + p_2\omega_2^1) + \beta(\omega_1^2 + p_2\omega_2^2) = \omega_1^1 + \omega_1^2,$$

Y despejando el precio p_2:

$$p_2 = \frac{(1-\alpha)\omega_1^1 + (1-\beta)\omega_1^2}{\alpha\omega_2^1 + \beta\omega_2^2}.$$

Para más bienes, esto se vuelve complicado y en general, cuando deseemos calibrar modelos, necesitaremos de métodos numéricos y una computadora para resolver estos sistemas.

10.2 La Caja de Edgeworth

EL modelo anterior puede parecer algo esotérico, pero en realidad es un modelo muy útil para entender la interacción entre consumidores y productores. Para visualizar este modelo, utilizaremos la caja de Edgeworth.

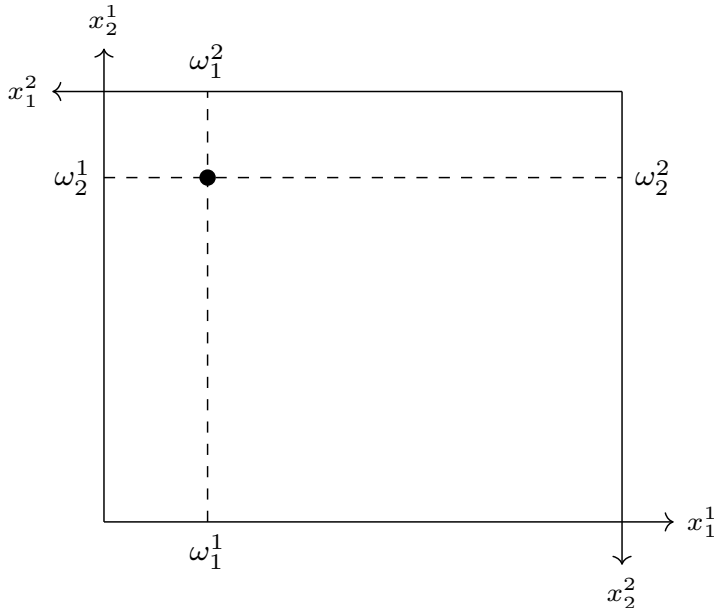


Figure 10.1: Caja de Edgeworth

La caja de Edgeworth es una representación gráfica de la economía de intercambio y resulta de dibujar los ejes positivos de un plano cartesiano para cada agente, y posteriormente rotar uno de los ejes en 180 grados y superponerlos. La base de la caja deberá medir la suma de las dotaciones del bien 1 de ambos agentes, mientras que la altura de la caja deberá medir la suma de las dotaciones del bien 2. Esto se representa en la figura 10.1. El punto marcado al interior de la caja representa la dotación inicial. Toda asignación posible de los recursos en esta economía, entre los agentes 1 y 2, puede ser representada por un punto en la caja de Edgeworth.

Podemos igualmente representar las preferencias de los agentes. En la figura 10.2 del lado izquierdo graficamos, para cada agente, la curva de indiferencia que pasa por su dotación inicial. En el lado derecho, graficamos igualmente

las mismas curvas de indiferencia, pero añadimos la tasa marginal de sustitución de cada agente, nuevamente en el punto de dotación inicial.

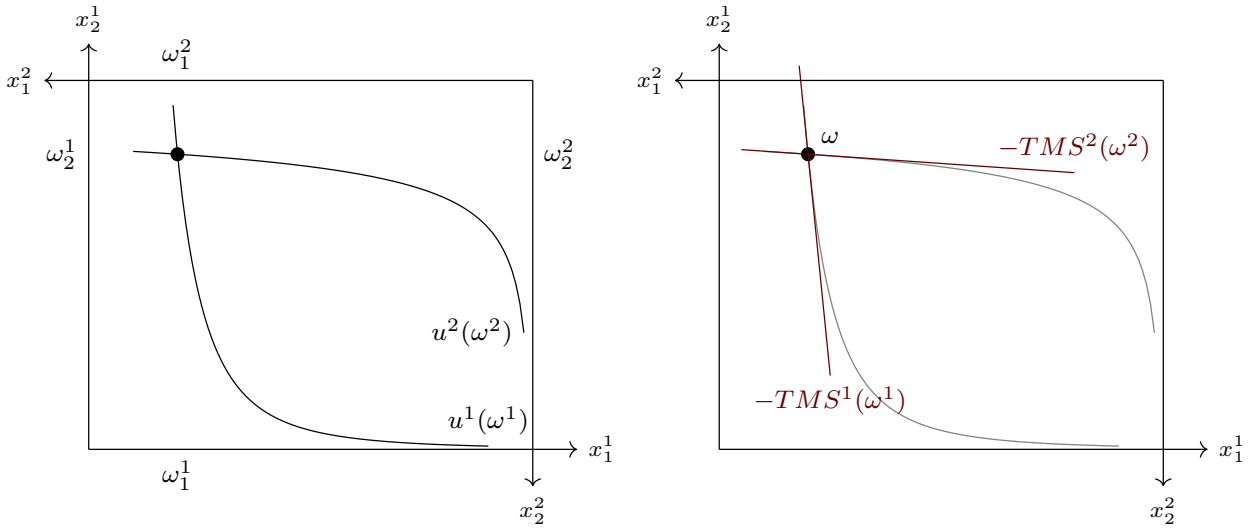


Figure 10.2: Preferencias en la caja de Edgeworth

Algo que salta a la vista es que es posible para ambos agentes incrementar su nivel de utilidad. Por ejemplo, si los agentes eligieran el punto en el centro de la caja de Edgeworth, ambos estarían en una curva de indiferencia más alejada que la que pasa por su dotación inicial. Esto es, ambos agentes podrían mejorar su bienestar si intercambiaran bienes.

Otra manera de interpretar lo anterior es mediante las tasas marginales de sustitución. La tasa marginal de sustitución del agente 1 en su dotación inicial, $TMS^1(\omega^1)$, es muy inclinada, lo cual indica que el agente 1 está dispuesto a sacrificar varias unidades del bien 2 por una unidad adicional del bien 1. Por su parte, la tasa marginal de sustitución del agente 2 en su dotación inicial, $TMS^2(\omega^2)$, es más plana, lo cual indica que el agente 2 está dispuesto a sacrificar pocas unidades del bien 2 por una unidad adicional del bien 1. Esta diferencia en la tasa marginal de sustitución es lo que conocemos como incentivos al intercambio.

$$TMS^1(\omega^1) \approx -\frac{\Delta x_2^1}{\Delta x_1^1} > -\frac{\Delta x_2^2}{\Delta x_1^2} \approx TMS^2(\omega^2).$$

Una ejemplo sencillo es suponer que el bien 1 es maíz, y el bien 2 es trigo. El agente 1 tiene mucho trigo y poco maiz, por lo que está dispuesto a dar muchas unidades de trigo por una unidad adicional de maíz. Por otro lado, el agente 2 tiene mucho maíz y poco trigo, por lo que está dispuesto a recibir pocas unidades de trigo a cambio de una unidad de maíz. Ya que ambas partes pueden mejorar su situación, existe posibilidad de intercambio.

No obstante, en este modelo, los agentes no negocian directamente entre ellos, sino que lo hacen a través del mercado y los precios. Supongamos que un agente central anuncia un día un vector de precios p, mismo que representamos en la figura 10.3. Este vector de precios genera una restricción presupuestal que naturalmente pasa por la dotación inicial de los agentes. Frente a este vector de precios, los agentes elegirán una canasta de consumo.

En la figura 10.3 representamos cómo ante cierto vector de precios p, se genera la restricción presupuestal que pasa por la dotación, y los agentes se situarán en la curva de indiferencia que sea tangente a la restricción presupuestal que se genera. En este caso, el agente 1 elige la canasta x^1, mientras que el agente 2 elige la canasta x^2. No obstante, observamos que se genera un exceso de demanda por el bien 1, y un exceso de oferta por el bien 2. Para observar esto, midamos la cantidad del bien 1 que el agente 1 demanda, y la cantidad del bien 1 que el agente 2 demanda, y notemos que la suma de estas distancias es mayor a la base de la caja de Edgeworth, esto es, la demanda del bien 1 supera a la oferta. Análogamente, para el bien 2, la suma de las cantidades demandadas por ambos agentes es menor a la altura de la caja de Edgeworth, esto es, la oferta supera a la demanda. En conclusión, el vector p que elegimos en la figura 10.3 no puede formar un equilibrio competitivo.

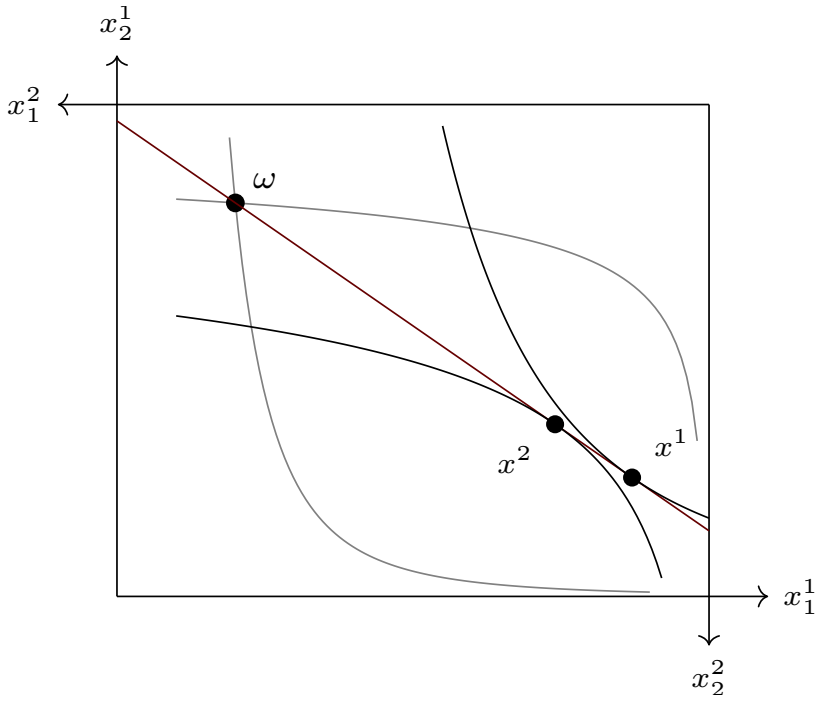


Figure 10.3: Exceso de Oferta/Demanda

En la figura 10.4 representamos un vector de precios que sí forma un equilibrio competitivo. Esto es, las canastas elegidas por ambos agentes son factibles, y no se genera exceso de demanda ni exceso de oferta.

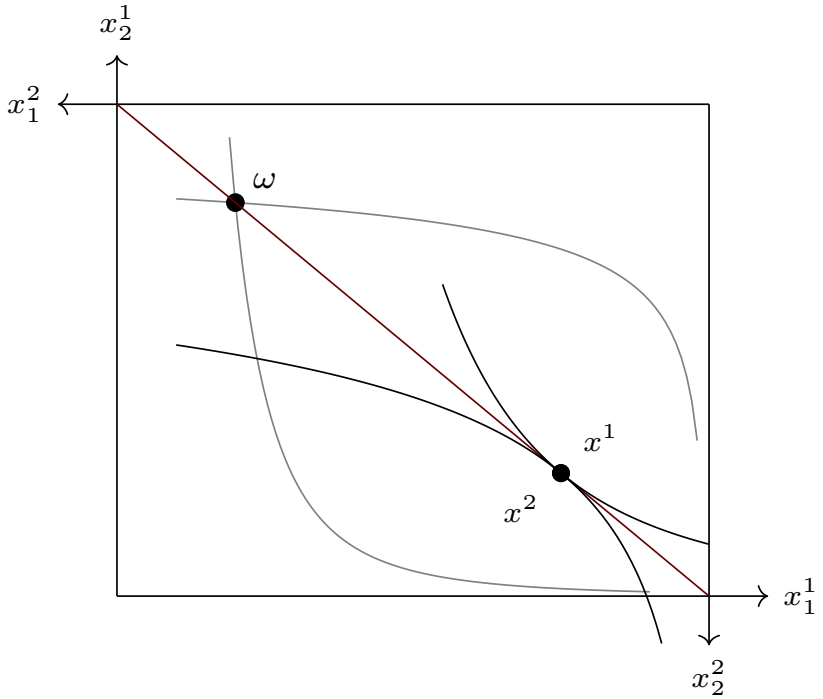


Figure 10.4: Equilibrio competitivo

10.3 Óptimo de Pareto

Haremos una pausa para introducir otro concepto, que es el de óptimo de Pareto. Este concepto, nombrado así por Wilfredo Pareto, surgió históricamente como una forma de sustituir la noción de equilibrio competitivo o equilibrio walrasiano. No obstante, ambos conceptos están relacionados a través de lo que conocemos como los teoremas fundamentales del bienestar. Para entender qué es un óptimo de Pareto, lo primero que tenemos que tener en mente es que este concepto es ajeno a los precios, y se enfoca exclusivamente a la asignación de recursos entre los agentes. Así, si bien es un concepto que se puede relacionar con el equilibrio competitivo, el óptimo de Pareto es un concepto distinto.

Óptimo de Pareto: Una asignación de recursos es un óptimo de Pareto, o eficiente en sentido Pareto, si no existe otra asignación que mejore la situación de al menos un agente sin empeorar la situación de otro agente. Formalmente, la asignación $x = (x^1, x^2, \dots, x^I)$ es un óptimo de Pareto si no existe otra asignación $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^I)$ tal que:

- $u^i(\tilde{x}^i) \geq u^i(x^i)$ para todo i.
- $u^i(\tilde{x}^i) > u^i(x^i)$ para al menos un i.

Asimimso, decimos que la asignación $\hat{x} = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^I)$ es una mejora en sentido pareto respecto de $\tilde{x}$ si al menos un agente mejora su situación sin empeorar la situación de otro agente. Notemos que esto no implica que $\hat{x}$ sea un óptimo de Pareto, pero sí implica que $\tilde{x}$ no es un óptimo de Pareto.

Podemos representar todos los puntos que son óptimos de pareto en la caja de Edgeworth. De manera sencilla, si una asignación $\tilde{x}$ es un óptimo de pareto, entonces es una solución al problema:

$$\max_x u^i(x^i) \quad \text{s.a.} \begin{cases} u^j(x^j) \geq u^j(\tilde{x}^j) \quad \forall j \neq i. \\ \sum_i x^i = \sum_i \omega^i. \end{cases}$$

No demostraremos la aseveración anterior.

En el caso de dos bienes, es fácil plantear el problema:

$$\max_x \; u^1(x^1) \quad \text{s.a.} \begin{cases} u^2(x^2) \geq u^2(\tilde{x}^2) \\ x^1 + x^2 = \omega_1^1 + \omega_1^2. \end{cases}$$

Podemos sustituir las restricciones de vaciado de mercado con igualdad, en la restricción de utilidad del agente 2:

$$\max_x \; u^1(x^1) \quad \text{s.a.} \quad u^2(\omega^1 + \omega^2 - x^1) \geq u^2(\tilde{x}^2)$$

Así, únicamente tenemos que resolver respecto del problema del agente 1. En el caso de una solución interior, el problema de Kuhn-Tucker nos dará como resultado que la tasa marginal de sustitución del agente 1 debe ser igual a la tasa marginal de sustitución del agente 2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u^1(x^1)}{\partial x_1^1} &= \lambda \frac{\partial u^2(\omega^1 + \omega^2 - x^1)}{\partial x_1^1}. \\ \frac{\partial u^1(x^1)}{\partial x_2^1} &= \lambda \frac{\partial u^2(\omega^1 + \omega^2 - x^1)}{\partial x_2^1}. \end{aligned}\right\} \implies TMS^1(x^1) = TMS^2(\omega^1 + \omega^2 - x^1).$$

A manera de ejemplo, supongamos funciones de utilidad Cobb-Douglas, donde sabemos que la solución será interior. Las funciones de utilidad están dadas por:

$$u^1(x_1, x_2) = (x_1)^{\alpha}(x_2)^{1-\alpha}, \qquad u^2(x_1, x_2) = (x_1)^{\beta}(x_2)^{1-\beta}.$$

Asimismo, supongamos que la dotación total en la economía es $\omega_1^1 + \omega_1^2 = \omega_1$ y $\omega_2^1 + \omega_2^2 = \omega_2$. Entonces, las canastas que son óptimas en sentido de Pareto están dadas por:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\omega_2 - x_2^1}{\omega_1 - x_1^1}.$$

Podemos despejar x_2^1 para poder graficar. En la caja de Edgworth en la figura 10.5 representamos la curva de contrato con algunas curvas de indiferencia mostrando la tangencia de las curvas de indiferencia (igualdad en la tasa marginal de sustitución). A esta curva la denominamos curva de Pareto.

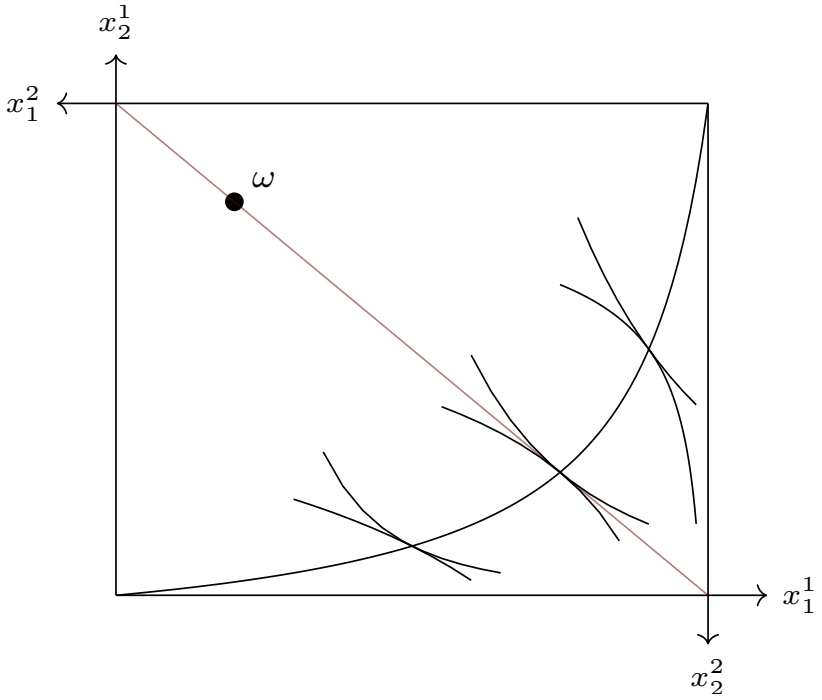


Figure 10.5: Curva de Pareto

Algo que salta a la vista es que el equilibrio competitivo está sobre la curva de Pareto (todas las gráficas anteriores muestran el mismo ejemplo). Esto no es coincidencia, y es resultado del primer teorema fundamental del bienestar.

10.4 Nucleo de la economía y primer teorema fundamental del bienestar

En esta sección veremos dos conceptos importantes que nos ayudarán a entender a qué se refieren los teoremas del bienestar. El primero es el de coalición y objeción.

Fijemos una economía de intercambio con I agentes, y denominamos sociedad a la colección de todos los agentes, $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, I\}$. Una **coalición** $\mathcal{H}$ es un subconjunto no vacío de la sociedad, esto es, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$ y $\mathcal{H} \neq \emptyset$.
Fijemos ahora una asignación de recursos en la sociedad $x = (x^1, x^2, \ldots, x^I)$. Decimos que la coalición $\mathcal{H}$ **objeta** la asignación x si existe un subperfil $\{\tilde{x}^i\}_{i\in\mathcal{H}}$ tal que:

- Para todo $i \in \mathcal{H}$, $x^i \geq 0$.
- $u^i(\tilde{x}^i) \geq u^i(x^i)$ para todo $i \in \mathcal{H}$.
- $u^i(\tilde{x}^i) > u^i(x^i)$ para al menos un $i \in \mathcal{H}$.
- $\sum_{i\in\mathcal{H}} \tilde{x}^i = \sum_{i\in\mathcal{H}} \omega^i$.

El concepto de coalición es sencillo, simplemente es un grupo de agentes en la economía, y este grupo puede abarcar desde un solo agente hasta todos los agentes. La objeción es un concepto un poco más difícil de entender. Nos dice que una coalición objeta una asignación si los miembros de la coalición pueden reasignar sus dotaciones entre ellos mismos, de tal manera que al menos un miembro de la coalición mejora su situación sin empeorar la situación de otro miembro de la coalición.

Una asignación de recursos x está en el **núcleo de la economía** si no existe una coalición $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ que objete la asignación x.

Es fácil ver que el núcleo de la economía es un concepto más fuerte que el de óptimo de Pareto. Si una asignación está en el núcleo de la economía, entonces es un óptimo de Pareto, pero no necesariamente a la inversa. Esto se puede ejemplificar en el caso de dos agentes y dos bienes. Turnemos la vista a la figura 10.6.

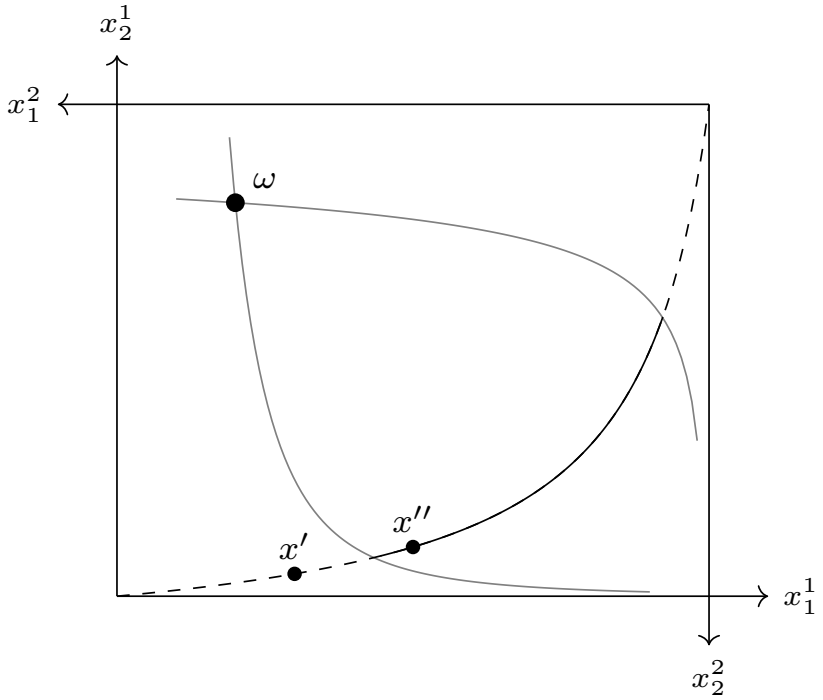


Figure 10.6: Núcleo de la economía (Curva de contrato)

En la figura 10.6 representamos en gris las curvas de indiferencia que pasan por la dotación inicial de los agentes. Las curvas negras sólida y punteadas representan, en su conjunto, la curva de pareto que dibujamos ya anteriormente en la figura 10.5. Notemos que si elegimos un punto en la curva punteada de la izquierda, x', si bien es un óptimo de Pareto, esta asignación no está en el núcleo de la economía. Esto se debe a que existe una coalición, en este caso, el agente 1 nada más, que preferiría consumir su dotación a consumir en la asignación x'. Por su parte, un punto

sobre la línea sólida, x'' sí está en el núcleo de la economía. Esto se debe a que no existe ninguna reasignación de recursos entre 1 y 2 que mejore la situación de al menos un agente (ya estamos en un óptimo de Pareto), y ninguno de los agentes está mejor formando otra coalición (en este caso, la coalición sería un agente solo) que le permita mejorar su situación.

En general, cuando tratamos con dos agentes, a la curva sólida la denominamos también curva de Contrato. Para más agentes, el concepto de curva de contrato se vuelve menos útil.

Primer Teorema Fundamental del Bienestar: Fijemos una economía de intercambio puro compuesta por un conjunto $\mathcal{I}$ de agentes, con respectivas funciones de utilidad $\mathbf{u}$ y dotaciones iniciales $\mathbf{w}$. Supongamos adicionalmente que para todo agente i, su respectiva función de utilidad u^i es localmente no saciable. Entonces, si (p, x) es un equilibrio competitivo en la economía, entonces x está en el núcleo de la economía. Corolario. Si x está en el núcleo de la economía, entonces x es un óptimo de Pareto.

Demostración, por contradicción. Asumamos que x no está en el núcleo de la economía. Pero como es un equilibrio competitivo, entonces:

$$\forall\, i, \qquad x^i \in \arg\max_{x^i} u^i(x) \quad \text{s.a. } p \cdot x \leq p \cdot \omega^i \tag{10.6}$$

$$\sum_i x^i = \sum_i \omega^i. \tag{10.7}$$

Pero como x no está en el núcleo de la economía, entonces existe una coalición $\mathcal{H}$ que objeta la asignación x. Esto es, existe un subperfil $\tilde{x}$ tal que:

$$\forall\, i \in \mathcal{H}, \qquad u^i(\tilde{x}^i) \geq u^i(x^i) \tag{10.8}$$

$$\exists\, j \in \mathcal{H}, \qquad u^j(\tilde{x}^j) > u^j(x^j) \tag{10.9}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{H}} \tilde{x}^i = \sum_{i\in\mathcal{H}} \omega^i. \tag{10.10}$$

De las ecuaciones (10.6) y (10.9), si el agente j no consume esta canasta, es porque no puede, es decir, no es costeable:

$$p \cdot \tilde{x}^j > p \cdot \omega^j. \tag{10.11}$$

Para todos los demás agentes de la coalición, dicha canasta puede o no ser costeable, pero por la ley de Walrás sí agotan su ingreso. Entonces:

$$p \cdot \tilde{x}^i \geq p \cdot \omega^i \quad \forall\, i \in \mathcal{H} \setminus \{j\}. \tag{10.12}$$

Sumando las ecuaciones (10.11) y (10.12):

$$p \cdot \sum_{i\in\mathcal{H}} \tilde{x}^i > p \cdot \sum_{i\in\mathcal{H}} \omega^i \quad \Longrightarrow \quad p \cdot \sum_{i\in\mathcal{H}} (\tilde{x}^i - \omega^i) > 0.$$

Lo anterior, no obstante, contradice la ecuación (10.10). Esto quiere decir que bajo los modelos de equilibrio competitivo expuestos anteriormente, si una asignación es un equilibrio competitivo, entonces es un óptimo de Pareto.

Segundo Teorema Fundamental del Bienestar: En una economía de intercambio si una asignación de recursos x es un óptimo de Pareto, entonces existe un vector de precios p, y un vector de dotaciones iniciales ω, tal que x es un equilibrio competitivo en (x, p).

La demostración del segundo Teorema es más complicada, y escapa a los alcances de esta nota. En resumen, quiere decir que si existe un óptimo de Pareto que se estime deseable, entonces es posible reasignar las dotaciones iniciales de la economía de tal manera que dicha asignación deseable se alcance como un equilibrio competitivo.

10.5 Equilibrio Competitivo en una Economía con Producción

Hasta ahora hemos trabajado con una economía de intercambio puro, donde los agentes tienen una dotación inicial de bienes finales, y a través del mercado intercambian estos bienes, y generan los precios. Ahora introduciremos producción. La diferencia fundamental es que los agentes cuentan con dotaciones de materias primas y, a través de los mercados, pueden vender estas materias a empresas, quienes transforman la materia prima en bienes finales que los agentes consumen. Estas empresas estarán caracterizadas por una tecnología que les permitirá transformar cualquier vector de insumos en determinado vector de bienes finales, tal y como lo hicimos en la sección 9.

Definimos una economía con producción a partir de los siguientes elementos:

- La sociedad, un conjunto de individuos $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, I\}$, $I \in \mathbb{N}$, a los que denotaremos por i.
- La industria, un conjunto de empresas $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, J\}$, $J \in \mathbb{N}$, a las que denotaremos por j.
- Un conjunto de L bienes, $L \in \mathbb{N}$, que denotaremos por l.
- Para todo i, una función de utilidad que representa sus preferencias, $u^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$.
- Para toda $j \in \mathcal{J}$, una función de producción, una tecnología de producción $Y^j \subseteq \mathbb{R}^L$.
- Para cada $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$, s^{ij} representa la participación que tiene el agente i en la empresa j, tal que $\sum_{i\in\mathcal{I}} s^{ij} = 1 \; \forall \, j \in \mathcal{J}$.

Para esta economía, para determinado vector de precios p, las ganancias de la empresa j están dadas por $\sum_l p_l y^j_l = p \cdot y^j$. El valor nominal del consumo de i está dado por $p \cdot x^i$, y el valor nominal de su riqueza está dado por $p \cdot \omega^i + \sum_{j\in\mathcal{J}} s^{ij} p \cdot y^j$. Finalmente, la demanda agregada de bienes está dada por $\sum_i x^i$, mientras que la oferta agregada está dada por $\sum_i \omega^i + \sum_{j\in\mathcal{J}} y^j$. Notemos cómo la oferta agregada está compuesta por las dotaciones iniciales, más la producción que las empresas realizan. Esta producción puede ser "negativa" en caso de que las empresas utilicen un bien como insumo, o positiva, en caso de que transformen insumos en el respectivo bien final.

Así, definimos un equilibrio competitivo como un vector de precios p, un perfil de consumo $\{x^i\}_{i\in\mathcal{I}}$, y un perfil de producción $\{y^j\}_{j\in\mathcal{J}}$ tal que:

1. Para todo $i \in \mathcal{I}$, el agente i maximiza su utilidad, dada su restricción presupuestal:

$$x^i \in \arg\max_{x\in\mathbb{R}^L_+} u^i(x) \quad \text{s.a.} \quad p \cdot x \leq p \cdot \omega^i + \sum_{j\in\mathcal{J}} s^{ij} p \cdot y^j.$$

2. Para todo $j \in \mathcal{J}$, la empresa j maximiza sus ganancias, dada su tecnología:

$$y^i \in \arg\max_{y\in\mathbb{R}^L} p \cdot y \quad \text{s.a.} \quad y \in Y^j.$$

3. La demanda agregada es igual a la oferta agregada:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x^i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \omega^i + \sum_{j\in\mathcal{J}} y^j.$$

Empezaremos con un ejemplo sencillo de una economía con un solo agente representativo, dos bienes de consumo y un bien de producción (trabajo).

10.5.1 Un ejemplo sencillo

Para el ejemplo en cuestión, denotemos x_0 como el factor de producción, y ω_0 la dotación inicial que el agente representativo tiene de este factor. Supondremos además que cada empresa, 1 y 2 producen únicamente un bien

final cada una, a saber, la empresa 1 produce el bien y_1, y la empresa 2 produce el bien y_2. Asimismo, denotamos x_0^1 y x_0^2 como las cantidades del factor de producción utilizado por las empresas 1 y 2, respectivamente. El agente representativo es dueño de ambas empresas, por lo que es dueño también de las utilidades que generen aquéllas en la producción. Los precios los denotamos como p_0 para el bien de producción, y p_1 y p_2 para los bienes finales. Supongamos que el agente sólo tiene utilidad por los bienes finales.

Como siempre, empezamos definiendo qué es un equilibrio competitivo para esta economía. Un equilibrio competitivo para esta economía consiste en un vector de precios (p_0, p_1, p_2), y un vector de cantidades $(x_0^1, x_0^2, x_1, x_2, y_1, y_2)$ tal que:

1. El agente representativo maximiza su utilidad, dadas las restricciones presupuestales y tecnológicas.

$$\max_{x_1,x_2} \; u(x_1, x_2) \quad \text{s.a. } p_1x_1 + p_2x_y \leq p_0\omega_0 + \pi_1 + \pi_2$$

   en donde π_1 y π_2 son las utilidades que generan las empresas 1 y 2.

2. Las empresas maximizan sus utilidades, dadas las restricciones tecnológicas.

$$\max_{y_i,x_0^i} \; \pi_i = p_iy_i - p_0x_0^i \quad \text{s.a. } y_i \leq f_i(x_0^i)$$

   donde f_i es la función de producción de la empresa i, tal y como la definimos en la sección 9.2.

3. La demanda agregada es igual a la oferta agregada para cada bien.

$$\begin{aligned} x_0^1 + x_0^2 &= \omega_0 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

La manera de resolver el equilibrio es sencilla. Empecemos con el problema de las empresas. La solución al problema de maximización de utilidades de las empresas es una función de oferta de cada empresa $y_i = y_i(p_0, p_i)$, así como una función de demanda del insumo $x_0^i = x_0(p_0, p_i)$, para $i \in \{1, 2\}$. Con esto, podemos obtener los beneficios de cada empresa, $\pi_i = \pi_i(p_0, p_i) = p_iy_i(p_0, p_i) - p_0x_0^i(p_0, p_i)$.

Pasando al problema del consumidor, la solución al mismo da lugar a las funciones de demanda de los bienes finales $x_i = x_i(p_0, p_1, p_2, \omega_0, \pi_1(p_0, p_1), \pi_2(p_0, p_2)) = x_i(p_0, p_1, p_2, \omega_0)$. Finalmente, utilizamos las condiciones de vaciado del mercado:

$$\begin{aligned} x_0^1(p_0, p_1) + x_0^2(p_0, p_2) &= \omega_0 \\ x_1(p_0, p_1, p_2, \omega_0) &= y_1(p_0, p_1) \\ x_2(p_0, p_1, p_2, \omega_0) &= y_2(p_0, p_2) \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. No obstante, al igual que en el caso de la economía de intercambio puro, podemos demostrar que el sistema no es independiente, por lo que en realidad sólo tenemos 2 ecuaciones. Podemos normalizar el precio del bien de producción, $p_0 = 1$, y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde obtendremos p_1^* y p_2^*. Finalmente, las cantidades de equilibrio están dadas por:

$$\begin{aligned} x_0^1 &= x_0^1(1, p_1^*) \\ x_0^2 &= x_0^2(1, p_2^*) \\ x_1 &= x_1(1, p_1^*, p_2^*, \omega_0) \\ x_2 &= x_2(1, p_1^*, p_2^*, \omega_0) \end{aligned}$$

Algebráicamente, el sistema de ecuaciones puede ser tedioso de resolver. En general, podremos acudir a métodos numéricos, aunque la caracterización total del sistema puede ser complicada también. No obstante, podemos hacer uso otra vez de los teoremas del bienestar.

10.5.2 Los teoremas del bienestar en una economía con producción

Al igual que en nuestra economía de intercambio puro, podemos demostrar los teoremas del bienestar para una economía de producción.

Primer Teorema Fundamental del Bienestar: Fijemos una economía de producción con un conjunto $\mathcal{I}$ de agentes, con respectivas funciones de utilidad u y dotaciones iniciales ω. Asimismo, la economía se compone de un conjunto $\mathcal{J}$ de empresas, con respectivos conjuntos de producción $\mathbb{Y}$, y los agentes son dueños de las empresas de conformidad con un vector de participación s. Supongamos adicionalmente que para todo agente i, su respectiva función de utilidad u^i es localmente no saciable. Entonces, si (p, x, y) es un equilibrio competitivo en la economía, entonces (x, y) es eficiente en el sentido de Pareto.

Demostración. Por contradicción, supongamos que (p, x, y) es un equilibrio competitivo, pero (x, y) no es eficiente en el sentido de Pareto. El que (p, x, y) sea un equilibrio competitivo implica:

1. $\forall i,\ x^i \in \arg\max_x u^i(x) \quad \text{s.a.} \quad p \cdot x \leq p \cdot \omega^i + \sum_{j\in\mathcal{J}} s^{ij} p \cdot y^j$.
2. $\forall j,\ y^j \in \arg\max_y p \cdot y \quad \text{s.a.} \quad y \in Y^j$.
3. $\sum_i x^i = \sum_i \omega^i + \sum_j y^j$.

Por su parte, el que (x, y) no sea eficiente en el sentido de Pareto implica que existe una asignación alternativa $(\tilde{x}, \tilde{y})$ tal que:

4. $\forall j,\ \tilde{y}^j \in Y^j$.
5. $\sum_i \tilde{x}^i = \sum_i \omega^i + \sum_j \tilde{y}^j$.
6. $\forall i,\ u^i(\tilde{x}^i) \geq u^i(x^i)$.
7. $\exists i*,\ u^i(\tilde{x}^{i*}) > u^i(x^{i*})$.

Entonces:

8. De las aseveraciones 7. y 1., $p \cdot \tilde{x}^{i*} > p \cdot \omega^{i*} + \sum_{j\in\mathcal{J}} s^{i*j} p \cdot y^j$. (si el agente no elige la canasta que le da mayor utilidad es porque no le es costeable.)
9. De las aseveraciones 6. y 1. $\forall i\ p \cdot \tilde{x}^i \geq p \cdot \omega^i + \sum_{j\in\mathcal{J}} s^{ij} p \cdot y^j$. (si los agentes no eligen la canasta que potencialmente les da mayor utilidad es porque potencialmente no le es costeable).
10. De las aseveraciones 4. y 2., $p \cdot y^j \geq p \cdot \tilde{y}^j\ \forall j$. (las ganancias base de las empresas son mayores o iguales a las ganancias alternativas).

    De las implicaciones 8. y 9.:

$$\sum_i p \cdot \tilde{x}^i > \sum_i p \cdot \omega^i + \sum_i \sum_j s^{ij} p \cdot y^j = p \cdot \sum_i \omega^i + p \cdot \sum_j y^j \underbrace{\sum_i s^{ij}}_{=1}$$

    lo que implica:

11. $p \cdot \sum_i \tilde{x}^i > p \cdot \sum_i \omega^i + p \cdot \sum_j y^j$.
12. De la implicación 10. $\sum_j p \cdot y^j \geq \sum_j p \cdot \tilde{y}^j$, por lo que $p \cdot \sum_j y^j \geq p \cdot \sum_j \tilde{y}^j$.

13. De las implicaciones 11. y 12. $p \cdot \sum_i \tilde{x}^i > p \cdot \sum_i \omega^i + p \cdot \sum_j y^j > p \cdot \sum_i \omega^i + p \cdot \sum_j \tilde{y}^j$. Lo que implica que:

$$p \cdot \sum_i \tilde{x}^i > p \cdot \left(\sum_i \omega^i + \sum_j \tilde{y}^j \right).$$

No obstante, lo anterior contradice la aseveración 5.■

Segundo Teorema Fundamental del Bienestar: Fijemos una economía con producción $\mathcal{E} = \{\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathbb{Y}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{s}\}$, y sea (x, y) con $x^i \gg 0$ un vector de asignación eficiente. Supongamos que $\forall i$, u^i es continua, extrictamente creciente y cuasi-cóncava. Supongamos que $\forall j$, Y^j es convexo. Entonces existe un vector de precios $p \in \mathbb{R}_{++}$ y un vector de transferencias monetarias $m = (m^1, m^2, \ldots, m^I) \in \mathbb{R}^I$ tal que:

1. $\sum_i m^i = p \cdot \left(\sum_i \omega^i + \sum_j y^j \right)$; esto es, la suma de las transferencias monetarias es igual a la suma de la riqueza de la economía. En otras palabras, las transferencias son una redistribución, sin pérdidas, de la riqueza de la economía..
2. $\forall j$, $y^j \in \arg\max_y p \cdot y \quad \text{s.a.} \quad y \in Y^j$.
3. $\forall i$, $x^i \in \arg\max_x u^i(x) \quad \text{s.a.} \quad p \cdot x \leq p \cdot m^i$.

La demostración del segundo teorema del bienestar escapa a esta nota.

10.5.3 La frontera de posibilidades de producción y el problema del planificador central

En el apartado 10.5.1, dijimos que el álgebra era algo tediosa para resolver el sistema de ecuaciones. No obstante, podemos hacer uso de los teoremas del bienestar para simplificar el encontrar el equilibrio competitivo. En particular, si el óptimo de Pareto es único, entonces el primer teorema del bienestar nos dice que dicho óptimo de Pareto será el equilibrio competitivo.

Empezamos definiendo la frontera de posibilidades de producción (FPP) de la economía como todos aquellos vectores de producción que son factibles por la economía en general. En particular, para el caso de dos bienes, en un plano cartesiano, la FPP se trata de una curva que une los puntos extremos de la producción de los bienes. Como un ejemplo sencillo, supongamos que hay un único factor de producción, trabajo, denotado x_0. Supongamos que la empresa 1 produce únicamente el bien 1 y la empresa 2 produce únicamente el bien 2, cada una con la siguiente tecnología:

$$y_1^1 = f_1(x_0^1) \quad \text{y} \quad y_2^2 = f_2(x_0^2).$$

Supongamos que la cantidad total de trabajo disponible es ω_0. Entonces, la condición de vaciado nos dice que $x_0^1 + x_0^2 = \omega_0$. La FPP de la economía Si suponemos que las funciones de producción son crecientes, entonces tienen una función inversa, y la FPP puede ser caracterizada como:

$$x_0^1 + x_0^2 = f_1^{-1}(y_1^1) + f_2^{-1}(y_2^2) = \omega_0.$$

Commo ejemplo sencillo, supongamos que $\omega_0 = 1$ (la dotación de trabajo en la economía es igual a 1 unidad), y que las funciones de producción son $f_1(x_0^1) = \sqrt{x_0^1}$ y $f_2(x_0^2) = \sqrt{x_0^2}$. Entonces:

$$f_1^{-1}(y_1^1) = (y_1^1)^2 \quad \text{y} \quad f_2^{-1}(y_2^2) = (y_2^2)^2.$$

Por lo que

$$x_0^1 + x_0^2 = (y_1^1)^2 + (y_2^2)^2 = 1.$$

Esto lo podemos resolver fácilmente, despejando y_2:

$$y_2^2 = \sqrt{1 - (y_1^1)^2}.$$

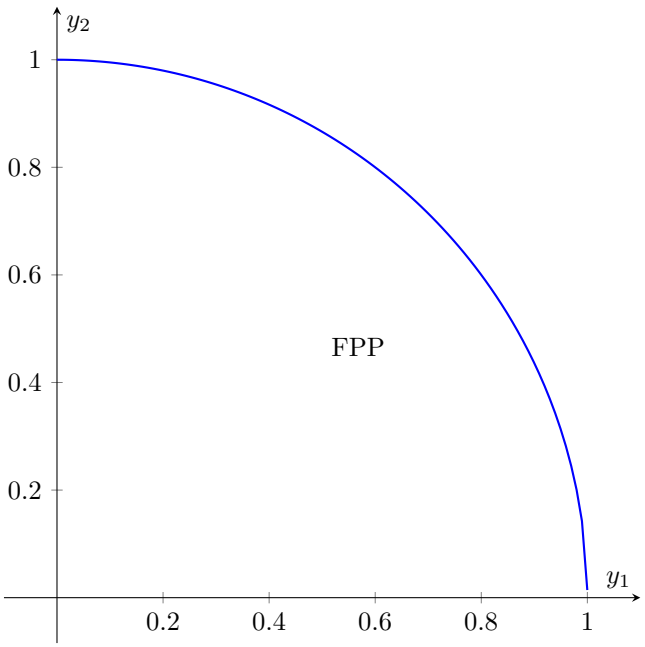


Figure 10.7: Frontera de posibilidades de producción

lo cual representamos gráficamente en la figura 10.7.

Todos los puntos al interior de la FPP son factibles, pero sólo aquellos sobre la frontera son eficientes. Es de esperar, entonces, que el óptimo de Pareto (y por ende, el equilibrio) esté sobre la FPP. Antes de esto, analizaremos un poco más la FPP.

Denominamos como la Tasa Marginal de Transformación (TMT) al cociente entre la cantidad de un bien i que debemos de sacrificar para obtener una unidad adicional del bien j. Esto es:

$$\text{TMT}_{ij} = \frac{dy_i}{dy_j},$$

la cual es la pendiente de la FPP.

¿Qué diferencia tiene esto con la tasa marginal de transformación que definimos en la sección 9? Ninguna. Se trata del mismo concepto, simplemente aquí lo estamos derivando para la economía en su conjunto, y no sólo para una empresa en lo individual.

El planificador central es una abstracción de un gobierno que busca maximizar el bienestar de la sociedad, sujeto a las restricciones de la economía. En el caso de una economía de producción, con un agente representativo, un factor de producción, y dos bienes finales, y siguiendo con el ejemplo anterior, el problema del planificador central se convierte en el siguiente.

$$\begin{aligned}
&\max_x \ u(x_1, x_2) \\
&\text{s.a.} \quad y_1^1 = \sqrt{x_0^1} \\
&\qquad\quad y_2^2 = \sqrt{x_0^2} \\
&\qquad\quad x_0^1 + x_0^2 = w_0 = 1 \\
&\qquad\quad x_1 = y_1^1 \\
&\qquad\quad x_2 = y_2^2
\end{aligned}$$

Este problema lo podemos simplificar. Notamos que las restricciones de producción no son más que la FPP. Entonces, el problema lo covertimos en:

$$\begin{aligned} &\max_x u(x_1, x_2) \\ &\text{s.a.} \quad x \in \text{FPP}. \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} &\max_x u(x_1, x_2) \\ &\text{s.a.} \quad (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Donde al final sustituimis $x_1 = y_1^1$ y $x_2 = y_2^2$. Resolver este problema es sustancialmente más sencillo. La solución da inmediatamente x_1 y x_2 óptimos que, por el primer teorema del bienestar, serán el equilibrio competitivo. De igual manera, podemos obtener las cantidades trabajadas en cada empresa como $y_1^1 = x_1 = \sqrt{x_0^1}$, entonces $x_0^1 = (y_1^1)^2$, y de igual manera para la empresa 2. Finalmente, para obtener los precios de equilibrio, del problema de la empresa:

$$p_0 = p_1 f_1'(x_0^1) = p_2 f_2'(x_0^2),$$

donde p_0 representa el salario. Como tenemos 3 precios, pero sólo dos ecuaciones, podemos normalizar $p_0 = 1$, y despejando.

$$p_1 = \frac{1}{f_1'(x_0^1)} \qquad p_2 = \frac{1}{f_2'(x_0^2)}$$

Una forma alternativa de plantear el problema del planificador central es a partir de los insumos utilizados por las empresas. En este caso:

$$\max_{x_0^1, x_0^2} u(f_1(x_0^1), f_2(x_0^2)) \quad \text{s.a.} \quad x_0^1 + x_0^2 = \omega_0.$$

El problema es equivalente al anterior, pero permite una interpretación adicional. Al plantear las condiciones de primer orden del problema de maximización:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_0^1} = \lambda \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_0^2} = \lambda.$$

Igualando las dos expresiones anteriores, obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_0^1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_0^2}.$$

y despejando:

$$\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \frac{\partial f_2 / \partial x_0^2}{\partial f_1 / \partial x_0^1}.$$

La expresión a la izquierda es la TMS que vimos en la sección 2.3. Respecto a la expresión de la derecha:

$$\frac{\partial f_2 / \partial x_0^2}{\partial f_1 / \partial x_0^1} = \frac{\partial f_2 / \partial (w_0 - x_0^1)}{\partial f_1 / \partial x_0^1} = \frac{dy_2}{dy_1} = \text{TMT}_{12}.$$

Gráficamente, lo representamos en la figura 10.8.

10.6 Dos modelos de economía con producción

En esta sección, presentaremos dos modelos de economía con producción. El primero es de una economía con un agente representativo, dos factores de producción y dos bienes finales. El segundo es el de una economía con oferta laboral endógena. Para ambos, utilizaremos una notación distinta a la que hasta ahora hemos utilizado.

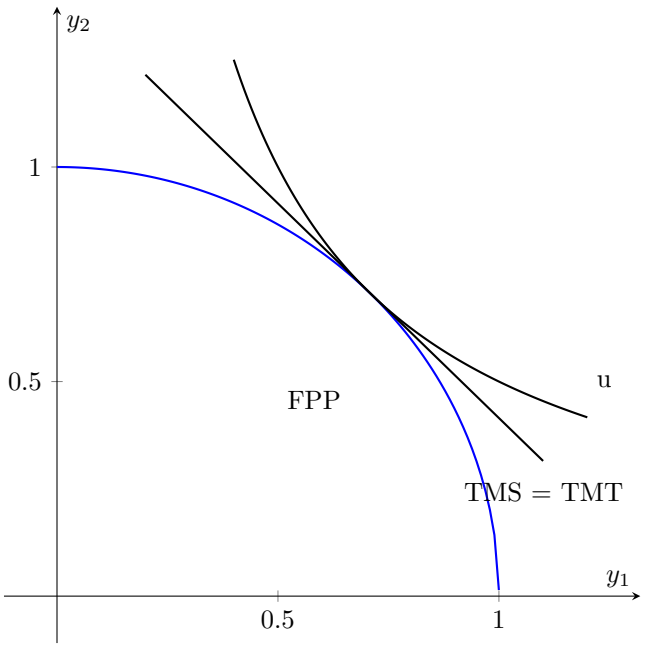


Figure 10.8: Equilibrio competitivo en una economía con producción

10.6.1 Dos factores de producción

Vamos a suponer que existen dos empresas, 1 y 2, cada una de las cuales puede producir un solo bien final, 1 y 2, respectivamente. Cada empresa vende su producto al precio p_i, $i = 1, 2$ y utiliza dos factores de producción, a saber, trabajo L_i y capital K_i. El precio del trabajo es w y el precio del capital es r. Supondremos que las funciones de producción de las empresas son $y_1 = f_1(L, K)$ y $y_2 = f_2(L, K)$, respectivamente. Cada empresa busca maximizar sus beneficios:

$$\pi^i = p_i f_i(L_i, K_i) - wL_i - rK_i.$$

Existe un único agente representativo con preferencias convexas denotadas por la función de utilidad $u(x_1, x_2)$. Asimismo, el agente cuenta con una dotación de trabajo L y capital K. El agente busca maximizar su utilidad sujeta a su restricción presupuestal, misma que está dada por el valor de su dotación de trabajo y capital.

Definimos un equilibrio competitivo en esta economía como $\{x_1, x_2, L_1, K_1, L_2, K_2\}$ y un vector de precios $\{p_1, p_2, w, r\}$ tal que:

1. El consumidor representativo resuelve

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$
$$\text{s.a. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = wL + rK + \pi_1 + \pi_2,$$

   tomando los precios como dados.

2. Cada empresa resuelve su problema de maximización de beneficios

$$\max_{L_i, K_i} \pi_i = p_i f_i(L_i, K_i) - wL_i - rK_i,$$

   tomando los precios como dados.

3. Los mercados se vacían:

$$x_1 = f_1(L_1, K_1)$$
$$x_2 = f_2(L_2, K_2)$$
$$L = L_1 + L_2$$
$$K = K_1 + K_2.$$

Resolver el problema de equilibrio competitivo en esta economía puede ser tedioso. Hay, en primer lugar, que encontrar las demandas de trabajo y capital de las empresas, lo cual permite expresar las funciones de beneficios en función de los precios. Posteriormente, se resuelve el problema del consumidor representativo, y se obtienen las demandas de los bienes finales, en función de los precios, introduciendo los beneficios de las empresas dentro de la restricción presupuestal. Finalmente, utilizamos las condiciones de vaciado, obteniendo así un sistema de ecuaciones que podemos resolver para obtener los precios de equilibrio. Simplemente normalizamos uno de los precios.

No obstante, como se cumplen con los supuestos del primer teorema del bienestar, podemos resolver el equilibrio competitivo a partir del problema del planificador central. Empezamos por derivar la FPP de esta economía.

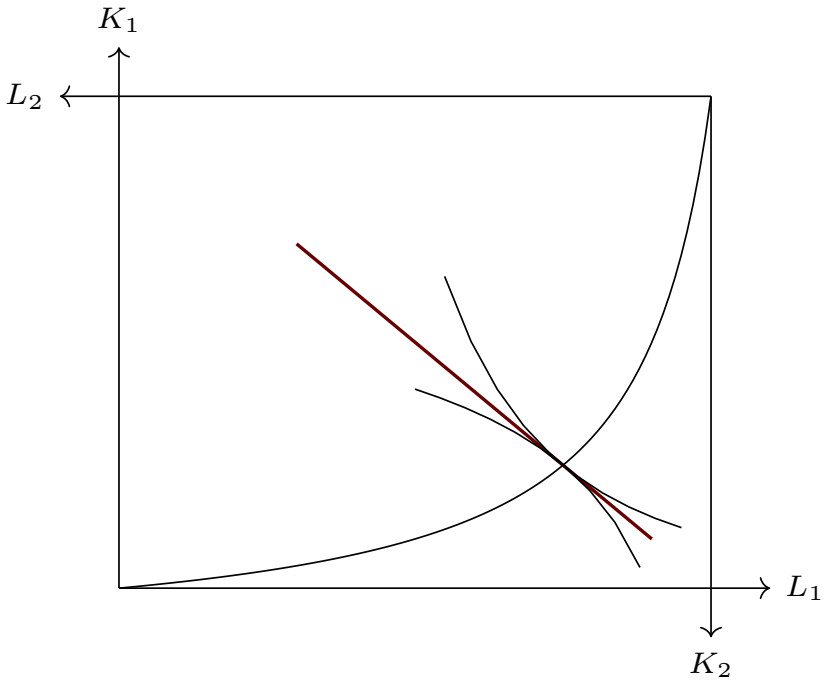


Figure 10.9: Curva de Pareto en la producción

En la figura 10.9, de manera similar a la figura 10.5, representamos la curva de Pareto de esta economía. Esta caja de Edgeworth representa las posibles combinaciones de trabajo y capital que pueden ser utilizadas por las empresas 1 y 2. En la misma, podemos graficar las isocuantas de las empresas. La curva que va de origen a origen representa todas las posibles asignaciones de trabajo y capital tales que no es posible aumentar la producción de un bien sin disminuir la producción del otro, esto es, representa la FPP de la economía en términos de los factores productivos (en vez de en términos de los bienes finales).

Decimos que la empresa 1 es intensiva en trabajo si

$$\frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2},$$

mientras que la empresa 2, en este caso, es intensiva en capital. Este concepto no es absoluto, sino relativo a otras empresas. Por poner un ejemplo concreto, supongamos que la tecnología está dada por:

$$x_1 = f_1(L_1, K_1) = (L_1)^{\alpha}(K_1)^{1-\alpha} \quad \text{y} \quad x_2 = f_2(L_2, K_2) = (L_2)^{\beta}(K_2)^{1-\beta}.$$

Si $\alpha > \beta$, entonces la empresa 1 es intensiva en trabajo, y la empresa 2 es intensiva en capital. Para representar esto gráficamente, notamos que K_1/L_1 es la pendiente de la recta que parte del origen d e la empresa 1 a cualquier punto sobre la curva de Pareto, mientras que K_2/L_2 es la pendiente de la recta que parte del origen de la empresa 2 al mismo punto sobre la curva de Pareto.

Notamos como en la figura 10.10 que la empresa 1 es intensiva en trabajo, mientras que la empresa 2 es intensiva en capital, puesto que:

$$\frac{K_1}{L_1} < \frac{K_2}{L_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2}.$$

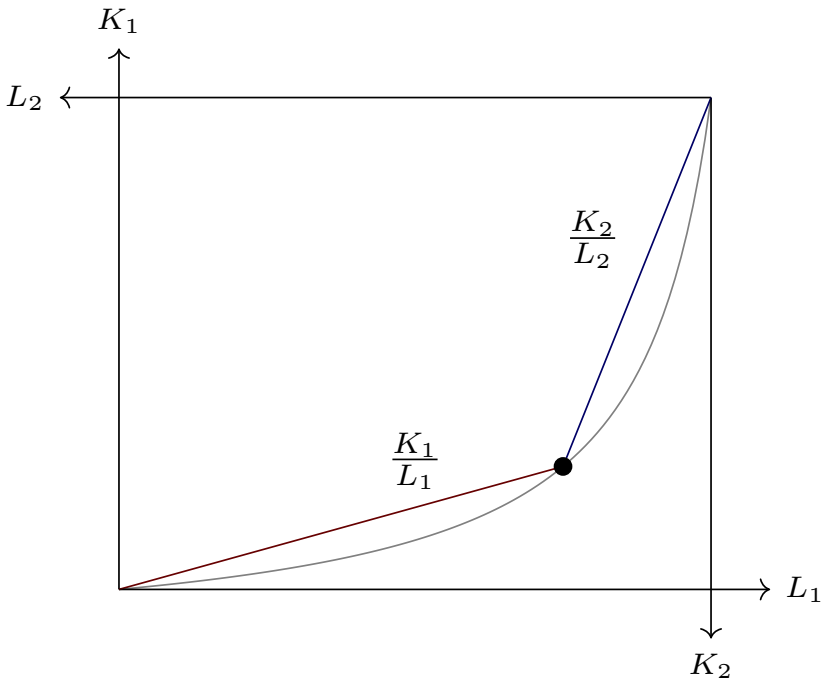


Figure 10.10: Intensidad en el trabajo y capital

Partamos del punto en el que ningun insumo de la proudcción es dedicado a la empresa 1, esto es, en el origen. Al empezar a producir x_1 de manera eficiente, notamos que L_1 empieza a avanzar más rápidamente que K_1. Esto se debe a que x_1 al ser intensivo en trabajo, buscará al principio más trabajo que capital.

Para obtener la FPP, podemos maximizar la producción de x_2 sujetos a que la empresa 1 produce una cantidad fija $\bar{x_1}$:

$$\begin{aligned} \max_{L_2,K_2} \ & f_2(L_2,K_2) \\ \text{s.a. } & f_1(L_1,K_1) = \bar{x_1} \\ & L_1 + L_2 = L \\ & K_1 + K_2 = K. \end{aligned}$$

Sustituyendo las restricciones de vaciado en la función objetivo:

$$\begin{aligned} \max_{L_1,K_1} \ & f_2(L - L_1, K - K_1) \\ \text{s.a. } & f_1(L_1,K_1) = \bar{x_1}. \end{aligned}$$

De las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_2}{\partial L_2} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = 0 \\ -\frac{\partial f_2}{\partial K_2} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial K_1} = 0. \end{aligned}$$

Despejando ambas ecuaciones y dividiéndolas:

$$\frac{\partial f_2/\partial L_2}{\partial f_2/\partial K_2} = \frac{\partial f_1/\partial L_1}{\partial f_1/\partial K_1}.$$

Es decir: $TMT^2 = TMT^1$, las tasas marginales de transformación se igualan. De la función anterior podemos despejar K_1 para expresarla comofunción de L_1:

$$K_1 = K_1(L, K, L_1)$$

Esta expresión la podemos sustituir en la función de producción del bien 1:

$$x_1 = f_1(L_1, K_1(L, K, L_1)).$$

Como esta función depende únicamente de L_1, y de las dotaciones de insumos que son constantes, podemos despejar L_1 en función de x_1:

$$L_1 = L_1(x_1).$$

Sustituyendo esto en $K_1(L_1)$, obtenemos $K_1 = K_1(x_1)$. Y ambas expresiones las podemos sustituir en la función de producción del bien 2:

$$x_2 = f_2(L - L_1(x_1), K - K_1(x_1)) = g(x_1).$$

Esto es, expresamos x_2 como función únicamente de x_1, lo cual nos da la FPP en bienes finales. Veamos un ejemplo sencillo, en donde

$$x_1 = (L_1)^\alpha (K_1)^{1-\alpha} \quad \text{y} \quad x_2 = (L_2)^\alpha (K_2)^{1-\alpha},$$

esto es, ambas empresas cuentan con la misma tecnología Cobb-Douglas. Suponemos que $L = K = 1$. Igualando las TMT obtenemos:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1-K_1}{1-L_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{K_1}{L_1}.$$

Despejando K_1 en términos de L_1: $K_1 = L_1$, y sustituyendo en la función de producción de la empresa 1, obtenemos: $x_1 = (L_1)^\alpha (K_1)^{1-\alpha} = L_1$. De donde:

$$L_1 = x_1 \quad \text{y} \quad K_1 = x_1$$

Y de las condiciones de vaciado:

$$L_1 = 1 - L_1 = 1 - x_1 \quad \text{y} \quad K_1 = 1 - K_1 = 1 - x_1.$$

Finalmente, sustituimos en la función de producción del bien 2:

$$x_2 = (1 - x_1)^\alpha (1 - x_1)^{1-\alpha} = (1 - x_1).$$

Lo cual nos da una frontera de posibilidades de producción con TMT constante e igual a 1.

Una vez teniendo la FPP, podemos obtener el equilibrio competitivo de la economía de la siguiente manera:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) \quad \text{s.a.} \quad x_2 = x_2(x_1).$$

donde la restricción no es más que la FPP, esto es, x_2 expresado como función de x_1. La solución al problema nos da x_1 y x_2 óptimos, y de ahí podemos obtener las demandas de trabajo y capital de las empresas, $L_1 = L_1(x_1)$ y $K_1 = K_1(x_1)$, así como $L_2 = L - L_1$ y $K_2 = K - K_1$. Finalmente, obtenemos los precios de la economía como:

$$w = p_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = p_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial L_2} \quad \text{y} \quad r = p_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial K_1} = p_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial K_2}$$

Normalicemos el precio del trabajo a 1, entonces:

$$p_1 = \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial L_1}} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{1}{\frac{\partial f_2}{\partial L_2}}.$$

Y finalmente, para obtener r:

$$r = p_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial K_1} = p_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial K_2}.$$

En muchas ocasiones, obtener la FPP de manera analítica no será posible. No obstante, podemos obtener el equilibrio competitivo a partir del problema del planificador central de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \; & u(x_1, x_2) \\ \text{s.a. } & x_1 = f_1(L_1, K_1) \\ & x_2 = f_2(L_2, K_2) \\ & L = L_1 + L_2 \\ & K = K_1 + K_2. \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo,

$$\max_{x_1, x_2} u(f_1(L_1, K_1), f_2(L - L_1, K - K_1))$$

10.6.2 Oferta laboral endógena

En este modelko, supondremos qe hay un agente representativo que tiene preferencias monótonas y convexas por ocio, que denotaremos h, y consumo, que denotaremos x, conforme a la función de utilidad $u(h,x)$. Para financiar su ocio y consumo, el agente c uenta con una dotación de tiempo H, que puede emplear para trabajar (oferta laboral l) a cambio de un salario w, y cuenta con las ganancias de la empresa π.El tiempo sólo lo puede ocupara para trabajo o para ocio, por lo que la condición de vaciado será $h + l = H$. Por otro lado, la empresa produce un bien de consumo y a partir de la cantidad de trabajo l que contrata, de conformidad con una tecnología $y = f(l)$, mismo que vende a un precio p.

Definimos un equilibrio competitivo en esta economía como un conjunto de cantidades (x, l, h, y) y de precios, tales que:

1. El consumidor representativo resuelve

$$\begin{aligned} &\max_{h,x} u(h,x) \\ &\text{s.a. } px + wl = wH + \pi, \end{aligned}$$

   tomando los precios como dados.

2. La empresa resuelve su problema de maximización de beneficios

$$\begin{aligned} \max_{l} \ \pi &= py - wl^d \\ \text{s.a. } y &= f(l^d), \end{aligned}$$

   tomando los precios como dados.

3. Los mercados se vacían:

$$\begin{aligned} x &= y \\ l &= l^d \\ h + l &= H. \end{aligned}$$

Normalicemos el precio del bien de consumo, $p = 1$. Del problema de la empresa,

$$w = f'(l^d).$$

Despejando el trabajo, obtenemos la función de demanda laboral como función del salario. $l^d = l^d(w)$. Sustituyendo en la función de producción, obtenemos

$$y = f(l^d(w)) = y(w).$$

Y enla función de beneficios:

$$\pi = y(w) - wl^d(w) = \pi(w).$$

Después pasamos al problema del consumidor representativo. De su problema de maximización de utilidad, éste deriva una función de demanda de consumo y de ocio como función de los precios $x = x(w)$ y $h = h(w)$, de tal suerte que la oferta laboral del individuo es

$$l(w) = H - h(w).$$

Y de las condiciones de vaciado:

$$x(w) = y(w) \quad \text{y} \quad l(w) = l^d(w).$$

Usamos cualquiera de las dos funciones para obtener el salario de equilibrio. Sustituimos el salario de equilibrio en las funciones anteriores para obtener las cantidades de equilibrio.

Al igual que en el caso anterior, podemos obtener el equilibrio competitivo a partir del problema del planificador central, ya que se cumplen los supuestos del primer teorema del bienestar. El problema del planificador central está

dado por:

$$\begin{aligned}\max_{h,x,y,l,l^d} \; & u(h,c) \\ \text{s.a. } & x = y \\ & y = f(l^d) \\ & l = l^d \\ & h + l = H.\end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned}\max_{h,x,l} \; & u(h,c) \\ \text{s.a. } & x = f(l) \\ & h + l = H.\end{aligned}$$

Las restricciones de factibilidad se reducen a dos. Primero, el consumo tiene que ser igual a la producción de la economía. En segundo lugar, el tiempo se agota en ocio o en trabajo. Podemos sustituir las restricciones nuevamente en la función de utilidad, y obtener:

$$\max_{l} \; u(H - l, f(l)).$$

La condición de primer orden nos da, utilizando la regla de la cadena:

$$-\frac{\partial u}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial l} = 0.$$

Como tenemos únicamente una incógnita, despejamos y obtenemos l óptima, que es igual a la cantidad ofertada y demandada de trabajo. La misma la podemos sustituir en la función de producción para obtener la cantidad de bien producido y consumido, y sustituir en la condición de vaciado del tiempo para obtener la cantidad de ocio, $h = H - l$. Como normalizamos el precio del bien de consumo a 1, obtenemos el salario de equilibrio como $w = f'(l)$. Esto lo representamos gráficamente en la figura **??**.

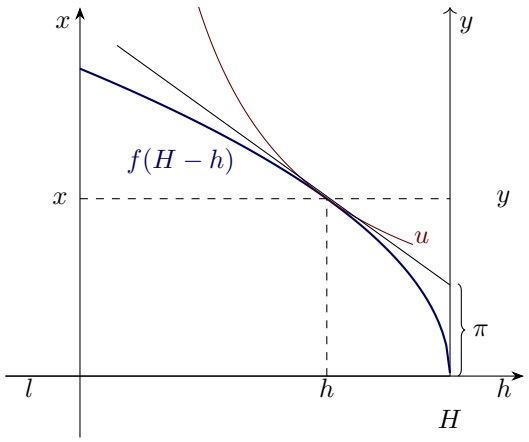


Figure 10.11: Oferta laboral endógena

La figura 10.11 representa la oferta laboral endógena. La gráfica consta de dos partes. La primera es el plano cartesiano normal (eje de las ordenadas de abajo a arriba y el de las absisas de izquierda a derecha) en donde se grafican las posibilidades entre ocio y consumo, y las curvas de indiferencia correspondientes. La segunda es un plano invertido (rotado como espejo, con el eje de las ordenadas aún de abajo a arriba, pero el de las absisas va de derecha a izquierda) en el que se grafica la función de producción de la empresa dependiente del insumo $l = H - h$.

En el eje de las absisas tenemos graficado también la cantidad total de tiempo que tiene disponible el agente, H. De izquierda a derecha, el individuo obtiene más ocio y, a conseuencia de ello, disminuye la cantidad trabajada. A la inversa, si el individuo decide trabajar más, se mueve de derecha a izquierda, y tiene menos ocio pero mayor producción, y por tanto, mayor consumo. De esa suerte, se cumple que $H = l + h$.

Notamos que la función de producción actúa como una FPP que transforma tiempo en unidades de consumo. La recta tangente a la función de proudcción y la curva de indiferencia hace las veces de una restricción presupuestal. La altura π es la ganancia de la empresa.

10.7 Existencia y unicidad del equilibrio competitivo

Si bien la definición de equilibrio competitivo de León Walrás implica la caracterización del equilibrio a partir de un sistema de ecuaciones, esto no implica automáticamente la existencia de un equilibrio. En 1954, Arrow y Debreu demostraron los supuestos bajo los cuales existe un equilibrio competitivo.

Teorema (Arrow-Debreu): supongamos que existen dotaciones estrictamente positivas para todos los bienes de la economía: $\sum_i \omega^i \gg 0$ y que las preferencias de todos los agentes son representables por una función de utilidad que sea continua, estríctamente cuasicóncava y estrictamente creciente. Entonces, existe un equilibrio competitivo en la economía.

La demostración del teorema de Arrow-Debreu requiere de fundamentos matemáticos que van más allá de la presente nota. La idea básica detrás de la demostración es que, con base en estas preferencias, si existe un exceso de demanda en un mercado, éste se puede ajuster, elevando el precio del bien en cuestión, hasta que el exceso de demanda sea cero. Un argumento similar se puede hacer para un exceso de oferta. El argumento de Arrow y Debreu es que este proceso de ajustes de precios converge a un vector de precios tal que el exceso de demanda es cero para todos los mercados. Esto es, que existe un vector de precios que equilibra la oferta y la demanda en todos los mercados.

Respecto a la unicidad del equilibrio competitivo, no se puede afirmar lo mismo. Esto es, no existe un teorema que determine condiciones mínimas generales bajo las cuales el equilibrio competitivo sea único. En particular, el teorema de Sonnenchein-Mantel-Debreu nos dice que la función de demanda agregada de la economía hereda pocas propiedades de las preferencias racionales.

Teorema (Sonnenchein-Mantel-Debreu): Sea $Z : \mathcal{S} \to \mathcal{R}^L$ (donde Z es la función de demanda agregada y S un vector de precios) continua y satisface la Ley de Walrás. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una economía de intercambio puro con L bienes que genera el la función de exceso de demanda Z sobre el vector de precios $\mathcal{S}_\varepsilon$, y cuyos agentes tienen funciones de utilidad continuas, localmente no saciables y cuasicóncavas.

La interpretación del teorema de Sonnenchein-Mantel-Debreu es que la función de demanda agregada puede ser arbitrariamente compleja (salvo continuidad y La Ley de Walrás), pero existe una economía que la genera. Una de las implicaciones es que la función de exceso de demanda no es necesariamente monótona en precios. Esto, a su vez, implica la posibilidad de una multiplicidad de equilibrios competitivos.

Este es un problema más grande de lo que parece a primera vista. Si el equilibrio competitivo no es único, entonces es difícil saber qué equilibrio estamos observando. Esto se conoce como problema de identificación. En la economía aplicada, si sabemos que un equilibrio es único, podemos inferir mucho sobre los parámetros primitivos de la economía a partir de los resultados observables de la misma. Si el equilibrio no es único, entonces no podemos inferir mucho sobre los parámetros primitivos de la economía.

Otros teoremas se han dedicado a estudiar bajo las cuales el número de equilibrios posible es finito, o cuando es que un equilibrio competitivo es, cuando menos, estable. No obstante, estos teoremas son más avanzados y se dejan para otro curso.

10.8 Sobre los teoremas del bienestar

Los teoremas del bienestar unieron dos conceptos que parecían estar separados: por un lado la eficiencia en el sentido de Pareto, y por otro, el equilibrio competitivo. El primer teorema del bienestar nos dice que si un equilibrio competitivo existe, entonces es eficiente en el sentido de Pareto. El segundo teorema del bienestar nos

dice que si una asignación es eficiente en el sentido de Pareto, entonces existe un vector de precios y un vector de transferencias monetarias que hacen que dicha asignación sea un equilibrio competitivo.

Una interpretación de los teoremas del bienestar es que el equilibrio de mercado es un mecanismo que permite alcanzar una asignación eficiente de los recursos. No obstante, el caso contrario es en realidad el que prevalece: los supuestos detrás del primer teorema del bienestar son tan estrictos que en la práctica, es muy difícil que se cumplan. Entonces el equilibrio competitivo no es necesariamente eficiente en el sentido de Pareto. Estos supuestos difíciles de cumplir versan sobre la no saciabilidad de las preferencias, la convexidad de los conjuntos de producción, y la competencia perfecta.

Si el equilibrio competitivo no es eficiente en el sentido de Pareto, entonces el gobierno puede intervenir para mejorar la asignación de los recursos. Esto es lo que nos dice el segundo teorema del bienestar. No obstante, el segundo teorema del bienestar tiene supuestos aún más estrictos que el primero. En particular, supone que el gobierno conoce las preferencias de los agentes, y que puede implementar transferencias monetarias sin costo alguno.

La parte normativa de los teoremas del bienestar nos dice en realidad que hay que ser cautelosos del equilibrio competitivo, y hay que ser aún más cautelosos de la intervención gubernamental.