Teoría de Juegos*

Diogenes Cruz Figueroa García

Marzo 2022

1 Introducción

En los cursos introductorios de Economía el enfoque se centra en los modelos de equilibrio parcial y equilibrio general, con nociones introductorias a la teoría de decisiones de los consumidores y las empresas. Estos modelos, ya sean competitivos o monopólicos, tienen en común a los precios como intermediarios en las interacciones entre oferentes y demandantes. Si bien estos modelos permiten analizar un amplio catálogo de mercados, la caja de herramientas de cualquier economista está incompleta sin contar, cuando menos, con nociones básicas de teoría de juegos.

En breve, la teoría de juegos es la rama de la economía que estudia las decisiones estratégicas de los agentes; esto es, los agentes reconocen que sus acciones pueden afectar la utilidad de los demás agentes y viceversa, y hacen uso de esta información para elegir su mejor curso de acción. El objetivo de esta nota es dar una introducción a la teoría de juegos, y como tal, nos desprenderemos de ciertas definiciones que resultan muy técnicas, y las reduciremos a un nivel tal que resulten intuitivas y fáciles de comprender.

Si bien la teoría de juegos ofrece una intuición a lo que coloquialmente es un juego, como Ajedrez o Póker, las aplicacioens a la economía son diversas. Los ejemplos más comunes son las interacciones estratégicas entre un número reducido de oferentes (oligopolio), y de la teoría de juegos se han desprendido ramas como teoría de contratos, teoría de negociación, diseño de mecanismos, teoría de subastas, diseño de mercados, entre otras.

Dos advertencias sobre la nota. Primera, Ésta se enfoca a los juegos no cooperativos, en donde "cada quien jala agua para su molino". Hay una rama completa de juegos cooperativos, en donde la característica es la posibilidad de formar coaliciones y convenios que una autoridad externa puede hacer valer; no es el objetivo aquí. 2) Dejaremos de lado los juegos de información imperfecta. Los juegos de información imperfecta son aquellos en que los jugadores pueden ser de distinto "tipo", y si bien cada jugador conoce su tipo, desconoce el tipo de los demás jugadores. Estos juegos son importantes en los problemas de información (selección adversa y riesgo moral), y son la base para el diseño de mecanismos y la teoría de subastas. Por el momento los dejaremos de un lado.

Entonces, por el momento definiremos un juego Γ_n como:[1]

- Un conjunto de n jugadores, en donde n es *suficientemente* pequeño.
- Un conjunto de m_i estrategias para cada jugador $i \in 1, .., N$:

$$\Sigma_i = \{\sigma_i^j\}_{j=1}^{m_i}$$

*Esta nota se está basada en Osborne, M. J, & Rubinstein, A. A course in Game Theory. MIT Press. 1994, así como en Rasmusen, E. Games and Information. An introduction to game theory. 4E. Blackwell Publishing, 2007. El libro de Rasmusen es un libro introductorio muy completo, con independencia de los diversos comentarios misóginos que ha emitido el autor en años más recientes. La segunda parte de Mas Colell, A. et al, Microeconomic Theory. Oxford University Press. 1995 contiene una versión con mayor rigor formal, lo cual lo hace igualmente un texto más avanzado.

[1] Si bien la definición completa de un juego (cualquier juego) es distinta, para los efectos de esta nota y la parte introductoria la iremos construyendo poco a poco.

- Y pagos, tal que los pagos pueden ser descritos mediante una función que depende de la estrategia del jugador i y de las estrategias elegidas por el resto de jugadores $-i$.

$$u_i(\sigma_i; \sigma_{-i})$$

En los juegos de información perfecta, lo relevante es que los agentes conocen perfectamente los pagos de los demás agentes. Esto es "conocer el tipo".

Al igual que en los modelos de equilibrio general y parcial, es de especial interés aquí encontrar un equilibrio. Aunque la manera en que definimos un equilibrio será distinta respecto de los modelos de equilibrio general y equilibrio parcial, es importante recordar la importancia de la noción de equilibrio: un equilibrio es un resultado que se mantendrá a menos que haya una perturbación exógena. Cuando la teoría de juegos comenzó a desarrollarse más en la década de 1950 y hacia 1960, economistas y no economistas celebraron ésto señalando el poder predictivo que tendría a futuro cuando la rama estuviera más desarrollada; no obstante, esta promesa quedó corta rápidamente, como veremos, ya que diversos juegos permiten multiplicidad de equilibrios, y la pura teoría de juegos no ofrece ninguna revelación de por qué ciertos equilibrios prevalecen y otros no. Con idependencia de que la teoría de juegos prometió más en sus inicios de lo que finalmente cumplió, los modelos ofrecen suficiente intuición para diversos comportamientos económicos.

2 Juegos Estáticos

2.1 Notación de Juegos en forma matricial o normal

En esta sección, nos detendremos a analizar la notación de un juego en forma matricial o normal. Empecemos con un Dilema del Prisionero sólo para explicar la notación. Posteriormente, retomaremos este ejemplo para empezar con los equilibrios.

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	4, 4	0, 5
	B	5, 0	1, 1

En esta matriz nos encontramos con los tres elementos de nuestro juego. En primer lugar, "Jugador 1" y "Jugador 2" que representa a cada uno de los agentes. En segundo lugar, encontramos las Letras {A,B,C,D} que representan las distintas acciones de este agente, y al tratarse de un juego estático en estrategias puras,[2] estas acciones corresponden con sus estrategias.[3]

Denotamos Σ_i el perfil completo de acciones que tiene cada agente. En este caso $\Sigma_1 = \{A, B\}$ y $\Sigma_2 = \{C, D\}$. Esto es, el "Jugador 1" puede elegir entre la estrategia A y la estrategia B, mientras el jugador 2 puede elegir entre la estrategia C o la estrategia D. La estrategia pura elegida por el agente i la denotaremos $S_i \in \Sigma_i$. Para facilidad de notación, utilizaremos $-i$ para referirnos a todos los agentes menos i, esto es, Σ_{-i} se refiere a los perfiles de estrategias de todos los jugadores menos i, mientras que S_{-i} se refiere a la estrategia pura tomada por los agentes que no son i.

El siguiente elemento con el que nos encontramos son los pagos de los agentes (en términos de utilidad, en general, aunque puede ser un pago monetario) representados por las celdas interiores, y en donde en general el primer número se refiere al pago del agente en las filas (Jugador 1), mientras que el segundo pago se refiere al agente ubicado en las columnas (Jugador 2). De tal suerte que si el jugador 1 decide jugar la estrategia A, y el jugador 2 decide jugar la estrategia D, es decir, $(S_1 = A, S_2 = D)$, notamos que la casilla de pagos que corresponde a esa combinación de estrategias contiene los pagos $(0, 5)$, es decir, Si los jugadores eligen

[2] Una estrategia pura es una estrategia que asigna una probabilidad de 1 a cada plan de acción.

[3] Es importante de una vez diferenciar entre acción y estrategia. Por acción nos referimos a cualquier acción que pueda tomar el agente, mientras que estrategia se refiere a un plan completo de acción, esto es, para cada conjunto de información, señala una acción disponible en dicho conjunto. Cuando lleguemos a juegos dinámicos introduciremos el concepto de conjunto de información, y quedará más claro en los juegos dinámicos de información incompleta.

dichas estrategias, el jugador 1 recibirá 0 de utilidad, mientras que el jugador 2 recibirá 5 de utilidad. En términos de utilidad:

$$u_1(S_1 = A|S_2 = D) = 0$$
$$u_2(S_2 = D|S_1 = A) = 5$$

Esta notación tiene la forma condicional, esto es, $u_1(S_1|S_2)$ es la utilidad del jugador 1 de elegir A, condicionado a que 2 eligió D. Aunque en adelante, por notación, podemos igualmente utilizar $u_1(S_1, S_{-i})$ sin que cambie la interpretación.

2.2 Respuestas de los agentes

Ahora nos vamos a fijar qué haría un agente ante las acciones de los demás agentes. La mejor respuesta del agente i depende de las acciones de los demás agentes (S_{-i}).En un juego Γ_n, $S_i^* \in \Sigma_i$ es una mejor respuesta a las estrategias de los demás jugadores, S_{-i}, si:

$$u_i(S_i^*, S_{-i}) \geq u_i(S_i, S_{-i}) \ \forall S_i$$

En ocasiones podemos definir una función de mejor respuesta, las cuales denotamos como $b_i(S_{-i})$ (la mejor respuesta de i dadas las estrategias tomadas por los demás agentes, S_{-i}). Notamos que a una estrategia del otro jugador, puede haber más de una estrategia como mejor respuesta. De manera formal[4]:

$$b_i : \Sigma_{-i} \to \Sigma_i$$

Notamos que en la función de mejor respuesta del agente i tiene como dominio el perfil de estrategias posibles de los demás agentes $-i$, y como contradominio las estratregias posibles del mismo agente i.

Regresemos a la matriz que teníamos anteriormente. Supongamos que el individuo 2 decide jugar la estrategia C. Si esto es así, el individuo 1 puede jugar las estrategias A y B con los pagos siguientes:

	C
A	$4, 4$
B	$\underline{\mathbf{5}}, 0$

En esta pequeña matriz, notamos que cuando el individuo 2 juega C, al individuo 1 le conviene jugar B, ya que esta estrategia le da una utilidad de **5**, mayor a la utilidad que le genera jugar A, que es 4. Es por eso que este pago está marcado en negritas, ya que corresponde al pago del individuo 1 dada esa estrategia del individuo 2. Es decir, la mejor respuesta del individuo 1 dado que 2 está jugando C es B. Es decir:

$$b_1(S_2 = C) = B$$

Hagamos ahora lo mismo, pero para el otro individuo. Supongamos que el individuo 1 está jugando la estrategia A. El individuo dos puede tomar las siguientes acciones:

	C	D
A	$4, 4$	$0, \underline{\mathbf{5}}$

De esta manera notamos que si el individuo 1 juega la estrategia A, el individuo 2 jugará la estrategia D ya que esta le genera una utilidad de **5**, mayor a la utilidad de jugar C que es 4. Es decir:

$$b_2(S_1 = A) = D$$

Una vez que conocemos las reacciones de los individuos, pasamos a ver los diferentes equilibrios.

[4]En caso de que existan dos o más respuestas que maximicen la utilidad del agente i ante Σ_{-i}, para poder determinar una función de mejor respuesta es necesario que nuestra función incluya una forma de decidir entre los argumentos que maximizan la utilidad.

2.3 Equilibrios en estrategias dominantes

Retomemos la matriz con el juego completo, aunque ahora llamaremos a la estrategias "honrar" y "traicionar", para hacer referencia al dilema del prisionero. Si hacemos este análisis para todas las estrategias para ambos individuos, una vez juntando la matriz de pagos terminaremos con algo de la forma:

		Jugador 2	
		Honrar	Traicionar
Jugador 1	Honrar	4, 4	0, **5**
	Traicionar	**5**, 0	**1**, **1**

Notemos que, independientemente de que el individuo dos juege C o D, el individuo 1 va a jugar la estrategia B. Es decir:

$$b_1(S_2 = C) = b_1(S_2 = D) = B$$

Esto es a lo que llamamos una estrategia dominante. Es decir, una estrategia tal que, independientemente de lo que hagan los demás jugadores, esa estrategia es la que maximiza su utilidad. En términos de utilidad, una estrategia S_i^* es una estrategia dominante si:

$$u_i(S_i^*, \hat{S}_{-i}) \geq u_i(S_i, \hat{S}_{-i}) \ , \forall \hat{S}_{-i}$$

En términos de una función de mejor respuesta, tenemos que S_i^* es una estrategia dominante si:

$$b_i(S_{-i}) = S_i^* \ , \forall S_{-i}$$

Para el caso de la matriz anterior, notamos que el individuo 2 también tiene una estrategia dominante que es D. Es decir, independientemente de lo que haga el individuo 1, el individuo 2 jugará la estrategia D.

Cuando todos los jugadores tienen una estrategia dominante, habrá un equilibrio en estrategias dominantes, en donde cada agente elegirá su estrategia dominante. En este caso, ambos jugadores siempre estarán *individualmente* mejor si traicionan. Entonces decimos que {traicionar, traicionar} es un **Equlibrio en Estrategias Dominantes**. **Es importante remarcar que el equilibrio es un perfil de estrategias (las estrategias tomadas por todos y cada uno de los agentes), *NO* los pagos asociados a esas estrategias**.

Cabe hacer una aclaración sobre este equilibrio. Notemos que los pagos asociados a este equilibrio en estrategias dominantes es $(1, 1)$. Notamos que si ambos jugadores hubieran honrado cierto pacto, los pagos asociados serían $(4, 4)$, y ambos individuos mejorarían su situación. Esto nos dice que el perfil de estrategias en que ambos traicionan, si bien es un equilibrio en estrategias dominantes, no es un óptimo de Pareto. Veamos qué ocurre. Lo que ocurre es que si bien {honrar, honrar} es un óptimo social (maximiza la suma de las utilidades), individualmente cada agente está mejor traincionando. Ultimadamente, ambos elegirán traicionar, llegando a un punto en donde se minimiza el bienestar social.

2.4 Equilibrio por eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas

Una estrategia $\hat{S}_i$ es una estrategia estrictamente dominada si:

$$u_i(\tilde{S}_i, S_{-i}) > u_i(\hat{S}_i, S_{-i}) \qquad \begin{matrix} \forall S_{-i} \\ \text{para algún } \tilde{S}_1 \neq \hat{S}_i \end{matrix}$$

Un individuo nunca jugará una estrategia estrictamente dominada, ya que cuenta con al menos una estrategia que le dará más utilidad. Una vez que un agente descarte una estrategia dominante, los demás agentes perciben que ahora están frente a un juego reducido (el juego completo menos la estrategia eliminada al ser estrictamente dominada). Así, los demás agentes podrán ver nuevamente sus estrategias restantes, y descartar una estrategia estrictamente dominada entre las restantes. El proceso es iterativo, hasta llegar a

		Jugador 2		
		I	II	III
Jugador 1	A	8, 6	0, 9	3, 8
	B	3, 2	2, 1	4, 3
	C	2, 8	1, 5	3, 1

que sólo exista un perfil de estrategias que sobreviva, al cual denominamos **Equilibrio por eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas**. A manera de ejemplo, veamos el siguiente juego:

En orden: C es estrictamente dominada para el Jugador 1. Una vez eliminada, notamos que ahora I es estrictamente dominada por III para el Jugador 2. Una vez eliminada, A es estrictamente dominada por B para el Jugador 1. Finalmente, una vez que se elimina, II es estrictamente dominada por III para el Jugador 2. El sombreado en las tablas siguientes muestran este proceso iterativo de eliminación.

1a Iteración

		Jugador 2		
		I	II	III
Jugador 1	A	8, 6	0, 9	3, 8
	B	3, 2	2, 1	4, 3
	C	2, 8	1, 5	3, 1

2a Iteración

		Jugador 2		
		I	II	III
Jugador 1	A	8, 6	0, 9	3, 8
	B	3, 2	2, 1	4, 3
	C	2, 8	1, 5	3, 1

3a Iteración

		Jugador 2		
		I	II	III
Jugador 1	A	8, 6	0, 9	3, 8
	B	3, 2	2, 1	4, 3
	C	2, 8	1, 5	3, 1

4a Iteración

		Jugador 2		
		I	II	III
Jugador 1	A	8, 6	0, 9	3, 8
	B	3, 2	2, 1	4, 3
	C	2, 8	1, 5	3, 1

Al final del proceso, llegamos a que {B, III} es el único perfil de estrategias que sobrevive, y por tanto, es el equilibrio por eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

Se puede hacer lo mismo, pero eliminando estrategias **débilmente** dominadas, en donde la definición es similar a la de estrictamente dominadas, con excepción de que la desigualdad se convierte en una desigualdad débil (de "mayor a" a "mayor o igual a"). No obstante, esto es aplicado rara vez, puesto que la eliminación de estrategias débilmente dominadas puede eliminar también equilibrios de Nash, que definiremos a continuación.

2.5 Equilibrio de Nash en estrategias Puras

No es tan difícil encontrar una situación en la que ninguno de los individuos tenga una estrategia dominante, o dejen de existir estrategias estrictamente dominadas antes de llegar a un equilibrio único. El siguiente ejemplo es un juego al que llamamos *Batalla de los sexos*.[5] Suponemos que una mujer y un hombre quieren elegir una actividad para una tarde de sábado, y están entre una pelea de box y el ballet. Ambos prefieren estrictamente ir acompañados a ir solos a cualquier evento, pero el hombre tiene una preferencia por el box, mientras que la mujer tiene una preferencia por el ballet.

		Hombre	
		Box	Ballet
Mujer	Box	1, 2	0, 0
	Ballet	0, 0	2, 1

[5]Un nombre demasiado desafortunado en pleno siglo XXI, pero nos apegaremos a la descripción original del juego para evitar confusiones.

Haciendo un análisis igual al de la subsección anterior, notemos cuáles son la mejor respuesta de cada individuo ante la acción del otro. Para la mujer:

$$b_M(S_H = Box) = Box$$
$$b_M(S_H = Ballet) = Ballet$$

Mientras que para el hombre:

$$b_H(S_M = Box) = Box$$
$$b_H(S_M = Ballet) = Ballet$$

De manera matricial, marcaremos con negritas los pagos que corresponden a la mejor respuesta de cada individuo dada la estrategiadel otro:

		Hombre	
		Box	Ballet
Mujer	Box	**1**, **2**	0, 0
	Ballet	0, 0	**2**, **1**

Notamos de la matriz que si los dos individuos están en el ballet, ninguno tiene incentivos a desviarse unilateralmente, ya que de hacerlo, el pago de cualquiera de ellos disminuirá. Para efectos, diremos que un *incentivo a desviarse* es un diferencial de pago (de utilidad) entre la situación inicial y la situación final mayor a cero, tal que el individuo prefiere dejar la situación inicial para moverse a la situación final. Si el invididuo no puede mejorar, entonces decimos que no tiene incentivos a desviarse.

En cuanto al término "unilateralmente", recordemos que los individuos sólo controlan sus estrategias. Al modelar el juego como un estático y no cooperativo, no existe posibilidad de negociación anterior, lo cual es una gran limitante de los juegos estáticos. Entonces, no tener incentivos a desviarse unlateralmente significa que sólo controlando sus acciones, el individuo no puede mejorar su situación. De aquí partiremos a una nueva definición de equilibrio, y nos iremos a algo intuitivo de equilibrio: un punto en el que la balanza no se mueve (salvo, como habíamos mencionado, que haya una perturbación externa). En un equilibrio aquí será un perfil de estrategias tal que ningún individuo tiene incentivos a desviarse unilateralmente. Esta es la definición de un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Definimos un equilibrio de Nash en estrategias puras como un perfil de estrategias puras (S_i^*, S_{-i}^*) tales que:

$$u_i(S_i^*, S_{-i}^*) \geq u_i(S_i, S_{-i}^*),\ \forall S_i,\ \forall i$$

En térmimos de la función de mejor respuesta, decimos que (S_i^*, S_{-i}^*) es un equilibrio de Nash si:

$$S_i^* = b_i(S_{-i}^*), \forall i$$

Notemos que la definición de equilibrio en estrategias dominantes es bastante parecida a la de un Equilibrio de Nash en Estrategias Puras, pero más estricta. Todo equilibrio en estrategias dominantes es un equilibrio de Nash, pero no a la inversa. Esto se puede demostrar a partir de las definiciones.

En juegos de dos jugadores representados en forma matricial es sencillo encontrar un equilibrio de Nash. Seguimos el procedimiento mencionado en la sección de mejor respuesta y remarcamos de alguna manera (en este caso, en negritas) el pago de cada jugador asociado a su mejor respuesta dada cada estrategia del otro jugador. Donde notemos una casilla en donde los dos pagos asociados a las estrategias estén marcados, ahí hay un equilibrio de Nash. Es decir, unilateralmente ningún individuo querrá moverse.

Reimaginemos la batalla de los sexos, pero ahora hay una estricta preferencia por el box sobre el ballet para ambos, y para estar acompañados sobre estar solos:

Al igual que en el juego clásico de batalla de los sexos, hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras, correspondientes a ir juntos al ballet o al box, aunque hay un equilibrio de Nash que domina en sentido

		Hombre	
		Box	Ballet
Mujer	Box	$\underline{\mathbf{5}}$, $\underline{\mathbf{5}}$	0, 0
	Ballet	0, 0	$\underline{\mathbf{1}}$, $\underline{\mathbf{1}}$

Pareto al otro. Un equilibrio de Nash se define únicamente como el punto donde nadie tiene incentivos a moverse, no obstante, no sabemos ex ante qué perfil de estrategias predominará (qué equilibrio de Nash se llevará a cabo). Partiendo de que ambos están atendiendo al ballet, ni el hombre ni la mujer tiene incentivos a *unilateralmente* cambiarse al box. Los equilibrios de Nash no describen una dinámica de transición al equilibrio, y esta es una de las mayores limitantes a la teoría de juegos.

2.6 Equlibrios de Nash en Estrategias Mixtas

Tomemos el juego siguiente que llamamos *Matching Pennies*. En este juego, ambos jugadores escogen Aguila (**A**) o sol (**S**) simultáneamente. El individuo 1 siempres prefiere escoger algo distinto de lo que escoge 2. En cambio, 2 siempres prefiere escoger lo mismo que lo que escoge 1. De aquí ya notamos que los jugadores nunca van a estar contentos al mismo tiempo, y es un ejemplo de los juegos de suma cero (lo que gana un agente necesariamente lo pierde algún otro). Representémoslo de manera matricial:

	A	S
A	$-1, \underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}, -1$
S	$\underline{\mathbf{1}}, -1$	$-1, \underline{\mathbf{1}}$

Notamos en este juego que si ambos jugadores están jugando la misma estragia, el jugador 1 tiene incentivos a desviarse. Pero si se desvía a un punto en que ambos estén jugando estrategias distintas, el jugador 2 tendrá incentivos a desviarse para que otra vez estén jugando la misma estrategia (imaginemos el caso de los hermanos pequeños que el hermano menor se quiere vestir igual que el hermano mayor, pero el hermano mayor no se quiere uniformar con su hermano pequeño). Es decir, no existe un perfil de estrategias tales que ningún jugador tenga incentivos a desviarse. No existe un perfil de estrategias que cumpla con los criterios de equilibrio de Nash mencionados anteriormente. No obstante, esto sólo quiere decir que no existe un equilibrio de Nash en estrategias puras, pero sí puede existir un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Dado un conjunto S_i de estrategias puras, una estrategia mixta para el jugador i es una función que a cada una de las M estrategias puras de i en Σ_i le asigna una probabilidad p_i^m de ser jugado, tal que:

$$0 < p_i^m < 1$$
$$\sum_m p_i^m = 1$$

Esto es, las probabilidades están estrictamente entre cero y uno, y la suma de estas probabilidades es uno, esto es, la probabilidad de que el jugador juege algo, lo que sea, es igual a 1. A esta asignación de probabilidades a cada estrategia pura para el jugador i la denotamos como la estrategia mixta σ_i:

$$\sigma_i = \{p_i^1, p_i^2, \ldots, p_i^M\}$$

Es decir, nuestras estrategias aquí no van a ser jugar una acción, ya que, como vemos en el juego anterior, si decidimos jugar una acción, la mejor respuesta del otro siempre nos puede poner peor.[6] Nuestras estrategias van a ser una asignación de probabilidad a cada acción posible, tal que la probabilidad asignada a cada estrategia sea mayor o igual a cero y menor o igual a uno, y que la suma de todoas esas probabilidades asignas sea igual a uno.

[6] Pensemos en el juego "piedra, papel o tijera". Si un jugador juega papel con probabilidad 1, entonces al otro jugador le convendrá jugar tijera con probabilidad 1, y el primer jugador estará siempre peor.

Ahora bien, ¿qué buscamos en un equilibrio de Nash en estrategias mixtas? Que dada la asignación de probabilidades, ningún jugador esté dispuesto a mover su asignación de probabilidades. Decimos que un perfil de estrategias mixtas $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas si:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\tilde{\sigma}_i, \sigma_{-i}^*),\ \forall \tilde{\sigma}_i,\ \forall i$$

Teorema: Sea $S_i^+ \subseteq S_i$ las estrategais que es juegan con probabilidad mayor a cero en σ_i^*. Entonces un perfil de estrategias mixtas $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas **si y sólo si**:

1. $u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = u_i(s_i', \sigma_{-i}^*),\ \forall s_i, s_i' \in S_i^+$
2. $u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i', \sigma_{-i}^*),\ \forall s_i \in S_i^+,\ \forall s_i' \notin S_i^+$

Esto es, un equilibrio de Nash en estrategias mixtas cumple con que, dada la asignación de probabilidades a sus respectivas acciones de los $-i$ jugadores (dada la estrategia de los $-i$ jugadores), el jugador i está indiferente entre jugar cualquiera de las distintas acciones posibles que juege con probabilidad mayor a cero (ya que si no está indiferente, jugará la acción que prefiere, y los demás jugadores decidirán conforme a su mejor respuesta, lo cual desencadenaría una serie de incentivos a desviarse, y no sería equilibrio de Nash). Y en segundo lugar, si el jugador decide jugar una acción con probabilidad igual a cero es porque las que juega con probabilidad mayor a cero le generan mayor utilidad (por ejemplo, nunca asignaría una probabilidad positiva a jugar una estrategia dominada).

Una nota importante para hacer uso de este teorema para encontrar equilibrios de Nash en estrategias Mixtas es que las utilidades tienen que ser del tipo von Neumann-Morgenstern. Esto permite obtener la utilidad esperada como una suma ponderada de las utilidades en cada escenario.

Notemos que tanto los equilibrios de Nash en estrategias dominantes como los equilibrios en estrategias puras cumplen con los requisitos de equilibrios en estrategias mixtas, en donde en cada equilibrio de Nash se juega una sola estrategia (con probabilidad igual a uno).

Entonces, para encontrar un equilibrio de Nash, lo haremos con este teorema. Es decir, el jugador 1 escojerá sus probabilidades de jugar cada acción tal que el individuo 2 esté indiferente entre sus acciones, y viceversa.

Tomemos el siguiente juego:

		(q)	$(1-q)$
		C	D
(p)	A	$-1, 1$	$2, -2$
$(1-p)$	B	$3, -3$	$-4, 4$

Notemos primero que este juego tiene la misma dinámica que el juego de *Matching Pennies* mencionado al inicio, ya que cada jugador siempre se quiere desviar. No obstante, hay una diferencia en los pagos. Diferentes pagos, aunque generen la misma dinámica de juego, generarán diferentes equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

Notamos un elemento que antes no estaba en nuestra matriz que son la p y $1-p$ al lado de las estrategias del jugador 1, y la q y $1-q$ arriba de las estrategias del jugador 2. Para los efectos de este juego, $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq q \leq 1$. En donde p es la probabilidad que el jugador asigna a la acción A y $1-p$ es la probabilidad que asigna a la acción B. Mientras que q es la probabilidad que el jugador 2 asigna a la acción C, y $1-q$ es la probabilidad que asigna a la acción D. Una estrategia para el jugador 1 está dada por $(p, 1-p)$, mientras que una estrategia para el jugador 2 está dada por $(q, 1-q)$. Ahora encontraremos el equilibrio de Nash en este juego.

En primer lugar, dejemos que 2 escoja q tal que 1 quede indiferente entre jugar A y jugar B. En este sentido, si 2 juega C con probabilidad q, y juega S con probabilidad $1-q$, el valor esperado de la utilidad de 1 si juega A y B respectivamente están dados por:

$$E_1[u_1(A|q)] = q(-1) + (1-q)(2)$$
$$E_1[u_1(B|q)] = q(3) + (1-q)(-4)$$

Por el teorema, como en un equilibrio de Nash el jugador 1 tiene que estar indiferente entre jugar cualquiera de esas acciones, igualamos ambas expresiones:

$$q(-1) + (1-q)(2) = q(3) + (1-q)(-4)$$

De tal manera que en un equilibrio de Nash, $q = 3/5$.

Ahora hagamos que 1 escoja p tal que 2 quede indiferente entre jugar C y jugar S:

$$E_2[u_2(C|p)] = p(1) + (1-p)(-3) = p(-2) + (1-p)(4) = E_2[u_2(D|p)]$$

De tal suerte que en un equilibrio de Nash, $p = 7/10$. El equilibrio de Nash está dado por los valores de p, $1-p$, q y $1-q$ asignados a cada estrategia pura.

Ahora, ¿qué pasa si algún jugador no está asignando probabilidades de acuerdo al equilibrio de Nash? Supongamos que el jugador 1 escoge $p = 1/2$, ¿qué haría el jugador 2? Notemos que $E_2[u_2(C|p = 1/2) = -1$ mientras que $E_2[u_2(D|p = 1/2) = 1$. Como la esperanza de la utilidad es mayor si juega D a que si juega C, decimos que la mejor respuesta de 2 dado $p = 1/2$ es $q = 0$ (recordemos que estamos en estrategias mixtas). Decir que $q = 0$ equivale a decir que el jugador 2 jugará D de manera segura, y no jugará C. No obstante, si esto ocurre, dado que 2 está jugando C, el jugador 1 querrá jugar la estrategia b con probabilidad igual a uno ($p = 0$), o sea, tendrá incentivos a desviarse (a cambiar su estrategia, cambiar su asignación de probabilidades). De aquí notamos que cuando un jugador asigna progabilidades de juego a cada una de sus estrategias tal que los demás jugadores no están indiferentes entre jugar cualesquiera de sus estrategias, hay incentivos a desviarse.

3 Aplicación a modelos de competencia oligopólica

3.1 Competencia en cantidades: Oligopolio de Cournot

Ahora vamos a ver una aplicación de teoría de juegos destinada a la competencia económica. Esta es la competencia de Cournot. Suponemos un mercado con las siguientes características:

- Hay n empresas.
- Cada empresa i produce un bien homogéneo denotado q_i, donde $i \in \{1, .., n\}$.
- Las empresas actúan por su propia cuenta (no hay colusión), y cuentan con poder de mercado, es decir, no toman los precios como dados, sino que saben que los pueden alterar.
- Las empresas escogen cantidades de manera racional para maximizar sus beneficios, tomando las cantidades que producen las demás empresas como dadas.

Como vemos, estamos en la presencia de un juego en el que cada empresa decide cantidades como su estrategia, tomando las estrategias de las demás empresas como dadas. Y hace esto de tal manera que busca maximizar sus beneficios. Ahora bien, notamos que la primera diferencia es que las empresas no tienen un número finito de estrategias numerables, sino que sus estrategias son infinitas, no numerables. Es decir, su estrategia es producir una cantidad mayor o igual a cero:

$$q_i \in \mathbb{R}_0^+$$

Esto complica el uso en forma matricial. No obstante, esto no impide que podamos encontrar los equilibrios de Nash. Si recordamos la definición de mejor respuesta, cada empresa eligirá su cantidad para maximizar sus beneficios tomando las demás cantidades como dadas. Entonces, vamos a plantear el modelo:

- Existe una demanda inversa del mercado dada por:

$$P = a - Q$$

En donde

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

- Cada empresa cuenta con una estructura de costos

$$C(q_i) = cq_i.$$
$$\text{donde } c < a$$

notemos que todas las empresas tienen el mismo costo marginal c. Se puede plantear el modelo con diferentes costos marginales, o estructuras de costos distintas (cuadráticos, por ejemplo). Por simplicidad, lo mantenemos así, pero se deja al lector ver qué ocurre cuando los costos son distintos. Se recomienda que se empiece usando para el caso de dos empresas.

- Cada empresa busca maximizar sus beneficios

$$\pi_i(q_i) = q_i * P(Q) - C(q_i)$$

Ahora ya estamos en posibilidades de plantear el problema de maximización. Antes de comenzar, simplifiquemos los beneficios de la empresa, asumiendo que los costos marginales son constantes e iguales a c_i:

$$\begin{aligned}
\pi_i q_i &= q_i * P(Q) - C(q_i) \\
&= q_i(a - Q) - c_i q_i \\
&= q_i(a - \sum_{j=1}^{n} q_j) - c_i q_i \\
&= q_i(a - q_i - \sum_{j \neq i} q_j) - c_i q_i
\end{aligned}$$

Ahora ya planteamos nuestro problema de maximización:

$$\max_{q_i} q_i(a - q_i - \sum_{j \neq i} q_j) - c_i q_i$$

CPO:

$$\begin{aligned}
a - 2q_i - \sum_{j \neq i} q_j - c_i &= 0 \\
\implies q_i &= \frac{a - c_i - \sum_{j \neq i} q_j}{2}
\end{aligned}$$

Esta expresión anterior es lo que llamamos la mejor respuesta de la empresa i dadas las cantidades de las demás empresas j (o $-i$). Asimismo, como el problema lo hicimos para cualquier empresa i, esta expresión es la mejor respuesta de cualquier empresa i. En total tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, a saber, las q_i. Si bien esto se puede resolver analíticamente, vamos a asumir algo más para simplificar, y esto es que $c_i = c \ \forall i$, i.e., las empresas son simétricas. Ahora bien, se puede demostrar por cualquier medio (aunque se ve por la simetría de las empresas y de los problemas de maximización) que $q_i = q_j \equiv q$. Sustituyendo esto en la función anterior tenemos que:

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{a - c - \sum_{j=1}^{n-1} q}{2} \\
\implies 2q &= a - c - (n-1)q \\
\implies (n+1)q &= a - c \\
\implies q &= \frac{a-c}{n+1}
\end{aligned}
$$

Aquí ya tenemos la cantidad que va a producir cada empresa. La producción total de todas las empresas va a ser

$$Q = \frac{n(a-c)}{n+1}$$

Y el precio de equilibrio va a estar dado por:

$$
\begin{aligned}
P &= a - \frac{n(a-c)}{n+1} \\
&= \frac{a+nc}{n+1}
\end{aligned}
$$

Finalmente, los beneficios de cada empresa están dados por:

$$\pi_i = \left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$$

Lo último que haremos con este modelo es ver qué ocurre cuando la cantidad de empresas tiende a infinito (competencia perfecta).

$$\lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} \frac{a+nc}{n+1} = c$$

La producción total de la economía será:

$$\lim_{n\to\infty} Q = \lim_{n\to\infty} = \frac{n(a-c)}{n+1} = a - c$$

Mientras que cada empresa producirá:

$$\lim_{n\to\infty} q = \lim_{n\to\infty} \frac{a-c}{n+1} = 0$$

Lo anterior no quiere decir que es idóneo que el número de empresas sea infinito como en competencia perfecta. Lo anterior se debe a que en el modelo anterior, supusimos que no había costos fijos. No obstante, ante la existencia de éstos, existe un número socialmente óptimo para el número de empresas, y que es menor a infinito. Por lo anterior, a veces se justifica que haya una regulación a la entrada para evitar que se dupliquen costos de manera innecesaria, o que las empresas se canibalicen entre ellas, generando pérdidas sociales.[7]

Antes de pasar a la siguiente sección haremos una aclaración. La solución anterior la encontramos rápidamente al tener empresas prácticamente iguales. No siempre será así. Cuando tengamos empresas distintas, podemos resolver el oligopolio de Cournot de la siguiente manera:

[7] Ver Mankiw, N. G. & Whinston, M. D. *Free entry and social inefficiency.* Rand Journal of Economics. Vol. 17, No. 1. 1986. pp 48-58.

1. Planteamos el problema de maximización de cada empresa y obtenemos sus condiciones de primer orden.

2. A partir de aquí, obtenemos las funciones de mejor respuesta de cada empresa i que será una cantidad q_i que dependerá de las cantidades de todas las demás empresas $-i$.

3. Notamos que tenemos n ecuaciones con n variables. Lo resolvemos como cualquier otro sistema de ecuaciones

Técnicamente, la manera en la que se ve mejor que el resultado es el deseado es resolver por sustitución. Esto se debe a que, como habíamos visto anteriormente, un equilibrio de Nash, sin pérdida general, cuando hay dos jugadores, cumple con:

$$b_1(S_2 = b_2(S_1 = S_1^*)) = S_1^*$$
$$b_2(S_1 = b_1(S_2 = S_2^*)) = S_2^*$$

Para este caso en particular, tenemos que:

$$q_1^* = b_1(q_2^* = b_2(q_1^*))$$
$$q_2^* = b_2(q_1^* = b_1(q_2^*))$$

De aquí se ve que se puede resolver como un sistema de ecuaciones cualquiera, ya que la solución que nos dan las expresiones anteriores equivale a resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables mediante la técnica de sustitución.

3.2 Competencia en precios: Oligopolio de Bertrand

3.2.1 Caso de bienes homogéneos

No obstante, las empresas no siempre compiten en cantidades. Si bien es cierto que la colocación de cantidades dentro del mercado es una manera estratégica de competir para maximizar los beneficios, las empresas pueden bajar los precios para acaparar mayor parte del mercado, en lugar de intentar vender siempre al mismo precio del mercado que la otra empresa, al haber escogido una cantidad. Eso sí, si la empresa fija un precio tal que llame la atención de los consumidores, ha de abastecer a la totalidad de esos consumidores (no puede fijar precio y cantidad, fija precio, y tiene que vender todas la cantidades demandadas). Las empresas producirán todas un bien homogéneo. Los consumidores eligirán a la empresa que venda más barato, pero si venden al mismo precio, se dividirán la demanda en partes iguales.

Vamos a ver distintos modelos dependiendo de especifidades de del conjunto de estrategias (precios) que pueden poner las empresas y de la estructutra de costos de las mismas. Empecemos con el caso sencillo. Para todos estos casos supondremos una demanda de la siguiente manera:

$$Q = 100 - P$$

El 100 está en lugar de una constante cualquiera para facilitar hacer los demás cálculos.

Supondremos dos empresas. Las empresas pueden poner cualquier precio entero, tal que la empresa i escoge $p_i \in \mathbb{Z}$. La estructura de costos de cada empresa es tal que $C_i(q_i) = 10q$. Es decir, las empresas tienen el mismo costo marginal, constante e igual a 10. Asimismo, cada empresa busca maximizar sus beneficios:

$$\pi_i(p_i) = \begin{cases} p_i * (100 - p_i) - 10(100 - p_i) & \text{if} \quad p_i < p_j \\ p * \frac{1}{2}(100 - p) - 10 * \frac{1}{2}(100 - p) & \text{if} \quad p_i = p_j \equiv p \\ 0 & \text{if} \quad p_i > p_j \end{cases}$$

Para encontrar en un equilibrio de Nash, vamos a proponer primero uno. Las estrategias de las empresas consisten en un precio. Digamos que una empresa fija un precio igual a $p_i = p_j = 20$. Fijamos el precio en

un número en lugar de una constante para poder facilitar la explicación. Notamos que si ambas empresas fijan el mismo precio, se dividen la demanda. A ese precio, la cantidad demandada total es igual a 80, por lo que cada empresa produce 40. De esta manera, queda que los beneficios de cada empresa serán:

$$\pi_i = 400$$

Ahora veamos si estas estrategias que pusimos son un equilibrio de Nash. Notamos que ninguna empresa querrá aumentar el precio del producto ya que, de hacerlo, no venderá nada y sus beneficios se irían a cero. Pero si, digamos, la empresa i baja el precio de 20 a 19, acaparará toda la demanda (dado que la empresa $j \neq i$ sigue con su estrategia de fijar un precio igual a 20). Al precio de 19 la cantidad demandada es 81, y los beneficios quedarán de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \pi_i = &\quad 810 \\ \pi_j = &\quad 0 \end{aligned}$$

De aquí vemos que, como los beneficios de la empresa i aumentan al bajar el precio en una unidad, el primer conjunto de estrategias propuesto no es un equilibrio de Nash, ya que cada empresa individualmente tiene incentivos a fijar un precio más bajo.

Ahora, partiendo de $(p_i = 19, p_j = 20)$, la empresa j no querrá tener beneficios 0, y le conviene, por ejemplo, fijar su precio en 19 y compartir la demanda con i. Supongamos que lo hace, entonces notamos que cada empresa, de nuevo, tendrá incentivos a disminuir su precio en un peso para acaparar más parte de la demanda. Esto puede ocurrir hasta que ambas empresas fijen su precio igual a 11, en cuyo caso los beneficios de ambas empresas son iguales a 40.5. ¿Querrá alguien desviarse? Para cualquier empresa, subir su precio o bajarlo enviará los beneficios a cero, por lo que nadie querrá desviarse.

Por lo anterior, el perfil de estrategias $(p_1, p_2) = (11, 11)$ es un equilibrio de Nash. Esto no significa que sea el único. Supongamos las estrategias $(p_i, p_j) = (10, 11)$. En este caso, la empresa i tiene beneficios cero, pero si sube su precio a 11 los aumentaría, entonces aquí no hay un equilibrio de Nash. Por otro lado, supongamos el perfil $(p_i, p_j) = (10, 10)$. Aquí los beneficios de ambas empresas son cero. Si una empresa aumenta el precio sus beneficios siguen siendo cero, por lo que no hay incentivos a desviarse. Pero si una empresa baja su precio, acapara toda la demanda pero poner un precio por debajo de 10 (costo medio) le ocasionaría pérdidas a la empresa. Entonces nadie tiene incentivos a desviarse. Así, en este juego hay un segundo equilibrio de Nash en el que ambas empresas fijan un precio igual a 10. Evidentemente, uno de los equilibrios domina al otro en sentido Pareto, pero esto es irrelevante para los equilibrios de Nash.

Notamos de este juego que si bien a las empresas les conviene fijar aunque sea precios iguales pero superiores a sus respectivos costos medios, al competir en precios individualmente a cada empresa le conviene seguir bajando su precio hasta llegar a beneficios bajos o incluso cero. Por eso decimos que el juego de Bertran es una secuencia de equilibrios de Nash que no son óptimos de Pareto.

¿Qué ocurre si los precios no están en los enteros, sino que pueden tomar cualquier valor real? Partamos del mismo lugar que en el ejemplo pasado, en que ambas fija el precio igual a 20. Notemos que cualquier empresa podrá bajar su precio no en un entero, sino en un una fracción ϵ, en donde $\epsilon \to 0$. Así continuarán bajando sus precios las empresas hasta que eventualmente lleguen a $p_i = 10 \; \forall i$. A diferencia del caso anterior, el perfil de estrategias de fijar precios iguales a 11 para ambas empresas no es equilibrio de Nash, ya que cada empresa podría individualmente bajar su precio marginalmente, acaparar toda la demanda e incrementar sus beneficios.

3.2.2 Bienes homogéneos, costos asimétricos

Otro caso de interés es cuando la estructura de costos es distinta. Digamos que la empresa 1 mantiene sus costos $C_1(q_1) = 10q_1$, mientras que la empresa 2 tiene ahora una estructura de costos tal que $C_2(q_2) = 5q_2$. Inicialmente supondremos que las estrategias son precios en los enteros positivos ($p_i \in \mathbb{Z}$). Los beneficios de las empresas son los mismos que en el caso pasado:

$$\pi_i(p_i) = \begin{cases} p_i * (a - p_i) - c_i(a - p_i) & \text{if} \quad p_i < p_j \\ p * \frac{1}{2}(a - p) - c_i * \frac{1}{2}(a - p) & \text{if} \quad p_i = p_j \equiv p \\ 0 & \text{if} \quad p_i > p_j \end{cases}$$

Al igual que en los ejemplos pasados, vamos a proponer una estrategia $(20, 20)$. Ocurrirá lo mismo que en el ejemplo anterior hasta que lleguemos a $(11, 10)$. La cantidad demandada será 90, y sólo la empresa 2 venderá la cantidad de 90. En este punto tenemos que:

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_2 = 450$$

En este punto, la empresa 1 no tiene motivos para subir sus precios, pues sus beneficios seguirán siendo de 0, si baja su precio a 10 seguirá con beneficios cero, y si lo disminuye aún más tendría pérdidas. En cuanto a la empresa 2, no le conviene subir su precio, pues de hacerlo compartiría la demanda al precio de 11 y una cantidad demandada total de 89, lo cual la dejaría con una producción de 44.5 y beneficios de 267.

Pero Éste no es el único equilibrio de Nash. Supongamos que en lugar de tener $(10, 11)$ tenemos $(10, 10)$ como en el ejemplo de costos iguales. Los beneficios se verían así:

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_2 = 225$$

Ahora bien, notemos que, por la estructura de costos, a diferencia del caso pasado, a partir de estas estrategias, es posible que la empresa que produce de manera más eficiente (la que tiene un costo marginal menor) continue bajando su precio. Lo bajará lo menos posible, es decir, a 9. Entonces, en $(10, 9)$ tenemos que la cantidad demandada es 91 que lo venderá únicamente la empresa j. Entonces tenemos:

$$\pi_i = 0$$

$$\pi_j = 364$$

A la empresa j le conviene más este punto. Notamos que en este punto la empresa i no se querrá mover porque sus beneficios serán 0 en el mejor caso. La empresa j está mejor aquí que subiendo o bajando su precio, por lo que estamos en la presencia de un equilibrio de Nash.

¿Es este el único equilibrio de Nash? No, queda al lector demostrar que todos los siguientes puntos son equilibrio de Nash (y son los únicos):

$$(11, 10), (10, 9), (9, 8), (8, 7), (7, 6), (6, 5)$$

En forma más general:

$$\begin{array}{cc} & (k, k-1) \\ \text{Tal que} & k \in \{11, 10, 9, 8, 7, 6\} \end{array}$$

De manera simétrica, para el caso continuo en donde $p_i \in \mathbb{R}$, seguimos el mismo razonamiento para dar con que:

$$\begin{array}{cc} & (k, k-\epsilon) \\ \text{tal que} & k \in (5, 10] \end{array}$$

No obstante, como estamos en un caso continuo, recordemos que los números reales no son un conjunto compacto, así que entre k y $k - \epsilon$ siempre existirá otro número real. Esta indeterminación en el caso de los números reales genera que en éste último modelo no exista un equilibrio de Nash.

3.2.3 Bertrand con costos crecientes

En el ejemplo anterior, los costos marginales de las empresas eran constantes, y por lo tanto, los costos promedios también eran constantes. Así, si de repente una empresa baja su precio para acaparar toda la demanda, no existe ningún problema pues los costos promedios se mantienen constantes. No obstante, si los precios son crecientes la dinámica cambia. Por ejemplo, retomemos la demanda anterior $P = 100 - Q$, en donde los costos de las empresas $CT_i = 1_i^2$. Si ambas empresas fijan un precio igual a 40, la demanda total es de 60 por lo que cada empresa produce 30. Así, los costos de cada empresa son de 900, y los costos promedio son de 30. Pero si la empresa decide fijar un precio menor, digamos, de 39, la cantidad que enfrentaría dicha empresa es de 69, con costos totales de $4,761$, y costos promedios de 69.

Este incremento en costos repentino limita la capacidad de las empresas a ir disminuyedo precios. El problema va a ser similar al caso anterior, la demanda va a estar dada por $P = 100 - Q$ en donde $Q = q_i + q_2$, y $P = min\{p_1, p_2\}$, los costos de las empresas van a estar dados por $CT_i = q_i^2$, para $i \in \{1, 2\}$. Los beneficios de las empresas se ven:

$$\pi_i(p_i) = \begin{cases} p_i * (100 - p_i) - (100 - p_i)^2 & \text{if} \quad p_i < p_j \\ p_i * \frac{100-p_i}{2} - \left(\frac{100-p_i}{2}\right)^2 & \text{if} \quad p_i = p_j \equiv p \\ 0 & \text{if} \quad p_i > p_j \end{cases}$$

Nos interesa encontrar un equilibrio de Nash simétrico $p_1 = p_2 \equiv p$. Esto tiene sentido, las empresas son iguales, y además, si una empresa puede producir a un precio p y tener beneficios, la otra también podrá. Ahora, habrá una multiplicidad de equilibrios de Nash. La dinámica de costos crecientes hacen que para un rango de precios, tal que dividirse la demanda genera beneficios positivos, pero disminuir el precio y acaparar la demanda generaría pérdidas. Vamos a encontrar este rango.

Como los precios van a ser iguales, vamos a partir de cuando las empresas se dividen la demanda. Entonces, al individuo le tiene que convenir dividirse la demanda que subir sus precios y tener beneficios 0:

$$\pi_i = \left(\frac{100 - p}{2}\right) p - \left(\frac{100 - p}{2}\right)^2 \geq 0$$

A partir de ésto se puede obtener que el rango es de:

$$\frac{100}{3} \leq p \leq 100$$

Asimismo, partiendo de que se dividen la demanda, al individuo i le tiene que convenir dividirse la demanda que bajar sus precio y acapararse la demanda. Partiendo de $(p_i, p_j) = (p, p)$, la empresa i disminuiría su precio para fijarlo en $(p_i, p_j) = (p - \epsilon, p)$, con $\epsilon > 0$. Ahora bien, como estamos en los reales, la empresa bajaría su precio en una cantidad cercana a cero, $\epsilon \to 0^+$. Para efectos, diremos que esta ϵ es igual a cero, sólo para la desigualdad. Así que obtenemos:

$$\pi_i = \left(\frac{100 - p}{2}\right) p - \left(\frac{100 - p}{2}\right)^2 \geq (100 - p)p - (100 - p)^2$$

A partir de ésto se puede obtener que el rango es de:

$$p \leq 60$$

$$p \geq 100$$

De estas dos ecuaciones encontramos que el rango que satisface ambas ecuaciones es cuando $\frac{100}{3} \leq p \leq 60$. Entonces cualquier rango de precios $p_i = p_j \equiv p$ que satisfaga la desigualdad anterior es un equilibrio de Nash porque, por construcción, ningún individuo tiene incentivos a desviarse (dividirse la demanda es mejor que subir el precio y dejar de producir, y mejor que acapararse toda la demanda e incurrir en los costos).

3.2.4 Bertrand con productos diferenciados

El gran problema del modelo de Bertrand en su versión más sencilla es la paradoja de Bertrand: pese a haber un número reducido de empresas, y baja presión competitiva por ende, en el óptimo las ganancias son cero para las empresas. Como ya vimos, Las asimetrías de costos son una forma de eliminar esta paradoja; no obstante, el resultado es la existencia de un monopolio. Si bien esto puede explicar los monopolios como las industrias eficientes que desplazan a las ineficientes, el modelo no siempre coincide con la realidad. Lo mismo sucede con costos marginales crecientes, donde si bien puede ocurrir a nivel industria, a nivel empresa los costos marginales generalmente son constantes.

Una salida que se ha dado es la de considerar empresas con productos diferenciados. Esto es, cada empresa enfrenta una demanda que depende negativamente de su precio, pero positivamente del precio de su competidor: si mi competidor sube el precio, la demanda por mi producto aumentará. Asumimos entonces dos funciones de demanda para los productos sustitutos de la empresa 1 y 2 de la forma:

$$q_1(\cdot) = a_1 - b_1 p_1 + \gamma p_2$$
$$q_2(\cdot) = a_2 - b_2 p_2 + \gamma p_2$$

Por simplicidad del modelo, pero sin perder intuición en el modelo, asumiremos que los costos de las empresas son cero. Entonces, cada empresa maximiza su ingreso por ventas, dado por su cantidad, en función de los precios, multiplicada por los precios:

$$\max_{p_i}(a_i - b_i p_i + \gamma p_{-i})p_i$$

CPO:

$$a_i - 2b_i p_i + \gamma p_{-i} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_i(p_{-i}) = \frac{a_i + \gamma p_{-i}}{2b_i}$$

Del sistema de dos ecuaciones con dos incógintas (los precios), obtenemos los precios óptimos en función de los parámetros:

$$p_i^{Bertrand} = \frac{2a_i b_{-i} + a_{-i}\gamma}{4b_i b_{-i} - \gamma^2}$$

Por ahora, simplifiquemos asumiendo que $a_1 = a_2 \equiv a$ y $b_1 = b_2 \equiv b$. Entonces con un poco de álgebra podemos simplificar los precios de equilibrio de Bertrand a:

$$p_1^{Bertrand} = p_2^{Bertrand} = \frac{a}{2b - \gamma}$$

Es importante aquí recalcar que γ es una medida del grado de sustituición entre los bienes 1 y 2, y en general asumimos que $\gamma \leq b$, esto es, la cantidad demandada tiene que ser más sensible al precio propio que al precio del competidor. Un fenómeno que ocurre en este modelo es que conforme los productos son más sustitutos, i.e. γ es más grande, el precio de una empresa en equilibrio va a subir. Esto tiene sentido, pues cualquier incremento en el precio del competidor incrementa más mi demanda, y as su vez significa que puedo colocar un precio más elevado.

No obstante, algo que ocurre también es que no sólo es un precio de equilibrio el que aumenta, sino que ambos precios aumentan en equilibrio conforme γ crece. Esto es contraintuitivo: ¿por qué los precios pueden subir, si la cantidad de consumidores no ha cambiado? La razón por la que este fenómeno ocurre no tiene ninguna intuición económica, y se debe a una pequeña falla en el modelo, a saber, por la especificación que hacemos de la demanda, γ no solo mide la sustituibilidad (a mayor γ, mayor el efecto del cambio de p_{-i} sobre q_i), sino que también mide el tamaño de la demanda (a mayor γ, mayor el tamaño de la demanda q_i para cualquier nivel de precios del competidor p_{-i}).

En otras palabras, esto se debe a que este modelo de diferenciación es no estructural: no damos una razón por la cuales los productos son distintos. Esto lo podemos resolver con los modelos de diferenciación.

3.3 Modelos de diferenciación por Dirección

Como vimos, una alternativa para romper con la paradoja de Bertrand es la diferenciación de productos. No obstante, a diferencia de la sección anterior, queremos modelos estructurales que expliquen a qué se debe la diferenciación. La primera opción son los modelos basados en las funciones de utilidad de tipo Dixit-Stiglitz, en donde los consumidores muestran preferencias por un bien externo x_0, y preferencias compuestas (generalmente de tipo CES) por n productos sustitutos. Estos modelos los dejaremos para otra ocasión.

En esta sección nos interesan los modelos de diferenciación por dirección, y su nombre se desprende de que parten de una interpretación geográfica, aunque la interpretación puede ser cualquier dimensión (por ejemplo, calidad o contenido calórico en alimentos). En estos modelos, asumimos que los consumidores únicamente adquirirán un solo producto. La diferenciación deviene de consumidores heterogéneos, cada uno con su "tipo" (su ubicación geográfica, por así decirlo), pero con una distribución independiente e idéntica entre ellos.

Trataremos dos casos. En el primero, la diferenciación horizontal o modelo de Hotelling, los consumidores tendrán preferencias distintas por bienes diferentes, esto es, tienen una mayor disposición de pago por un bien que se ajuste a sus preferencias, y una menor disposición de pago por bienes que se alejen de su preferencia conforme a un costo de transporte (moverse de su producto ideal a un producto que se aleje de ese ideal). La interpretación geográfica es: los consumidores están dispuestos más a pagar en una tienda que esté ubicada en donde estén ellos, pero estarán dispuestos a pagar menos conforme se alejen, ya que en adición al precio del producto, deberán pagar el costo de traslado. En una dimensión no geográfica, los consumidores podrán estar dispuestos a pagar más por un cereal con chocolate y malvaviscos, otro consumidor por un cereal integral, pero cada uno está dispuesto a consumir el otro bien, aunque a un menor precio.

En la diferenciación vertical, o modelo de Mussa-Rosen, los consumidores coinciden en el ordenamiento de las preferencias (distinguen claramente un producto de mejor calidad que otro), pero difieren en su disponibilidad a pagar en general por cualquier producto dentro de la categoría. Un ejemplo muy utilizado son los productos "orgánicos", y que generalmente son más caros de consumir y con mayores costos de producción. En general, los consumidores coinciden que una docena de huevos orgánicos (y gallina libre de jaula) son de mejor calidad, pero no todos están dispuestos a pagar ese precio mayor.

3.3.1 Diferenciación horizontal: modelo de Hotelling

En 1929, Harold Hotelling propuso un nuevo modelo de competencia para contribuir a la competencia de Cournot y de Bertrand. Lo anterior, en un texto llamado "Stability in Competition". [8]. En este texto, Hotelling propone una "Ciudad Lineal" (imaginemos una ciudad en la que todas las casas están al borde de una misma calle, como a menudo sucede en paraderos en las carreteras), y las empresas compiten en precios según la distancia en la que estén colocadas.

Para estudiar este caso, vamos a asumir la misma ciudad lineal del km 0 al km 1, en donde la población se distribuye de manera uniforme a lo largo de la ciudad. Esto lo podemos interpretar como que hay una casa cada metro en donde vive exactamente una persona, y la población total es de 1,000 personas. Para simplificar nuestros cálculos, asumiremos que el tamaño de la población es igual a uno (lo único que significaría es que el resultado de la demanda que atiende cada tienda es en realidad el porcentaje de la población total). Recordemos que la función para una distribución uniforme en el rango $[0, 1]$ está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Asumimos que el trasladarse tiene, para cada individuo, un costo monetario dado por td^2, en donde t es un escalar, y d es la distancia que se tiene que trasladar el individuo. Podríamos asumir otro tipo de estructura de costo de traslado, por ejemplo lineal, pero poer ahora nos centraremos en los costos cuadráticos. Asimismo, asumimos que cada individuo consume una única unidad del bien, al cual le asigna una utilidad bruta de s. Asumimos igualmente que s es suficientemente grande, esto es, que sin importar el precio, los

[8] Hotelling, H. *Stability in Competition.* The Economic Journal, Vol. 39, No. 153 (Mar., 1929), pp. 41-57

individuos comprarán el bien. Asimismo, cada empresa venderá el bien a un precio p, de tal manera que la utilidad neta de cada individuo está dada por:

$$u = s - p_i - td^2$$

En donde $p_i \in \{p_A, p_B\}$, dependiendo de si le compra a la tienda A o a la tienda B. Asumiremos que s es suficientemente grande y la demanda estará cubierta, esto es, los consumidores están dispuestos a pagar "cualquier" precio por el bien. Este supuesto se puede relajar, y el problema se vuelve discontinuo, pero no lo cubriremos en el presente ejemplo. Inicialmente suponemos que la ubicación de las tiendas está dada, y que cada tienda únicamente puede decidir el precio. Posteriormente asumiremos que la decisión de cada empresa de dónde ubicarse es endógena, y que sucede un período antes de competir. Finalmente, suponemos que el costo marginal de cada empresa por proveer algún bien es de c.

3.3.1.1 Ubicación exógena de los productores

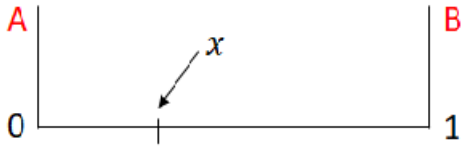
En el supuesto inicial, las empresas están ubicadas en cada extremo de la ciudad:

Ciudad Lineal



Vamos a suponer que existe un consumidor que está ubicado en algún punto intermedio x de la ciudad, y que libremente puede elegir entre trasladarse a la tienda A para realizar sus compras, o a la tienda B.

Consumidor en la ciudad lineal



Notamos que si nuestro consumidor x decide ir a la tienda A a comprar el bien, la utilidad que éste tendría sería de:

$$u(A) = s - p_A - tx^2$$

Lo anterior, ya que la distancia d ente el consumidor y la tienda A es de x. Por su parte, si decidiera consumir de la tienda B, su utilidad sería de:

$$u(B) = s - p_B - t(1-x)^2$$

Lo anterior, una vez más, ya que la distancia de un consumidor ubicado en x a la tienda B es de $1 - x$.

Una vez teniendo lo anterior, buscamos las condiciones del consumidor bajo las cuales está indiferente entre consumir de la tienda A o de la tienda B. Supongamos que dicho consumidor está en el punto x de la gráfica anterior. Si x está indiferente entre ambas tiendas, y considerando que los productos no son diferentes más que en la distancia a la que se encuentran, es razonable suponer que todos los consumidores a la izquierda de x prefieren ir a la tienda A, y los consumidores a la derecha preferirán ir a la tienda B. La

ubicación del consumidor indiferente entre ambas tiendas se da cuando la utilidad de consumir en A es igual a la utilidad de consumir en B. Esto es:

$$s - p_A - tx^2 = s - p_B - t(1-x)^2$$

Resolviendo la ecuación anterior, que el consumidor indiferente está ubicado en $\tilde{x}$, en donde:

$$\tilde{x} = \frac{p_B - p_A + t}{2t}$$

La demanda que enfrenta la empresa A es la totalidad de la población que se encuentra del lado izquierdo de la ubicación del consumidor indiferente (a la izquierda de $\tilde{x}$), mientras que la demanda que enfrenta la empresa B es la totalidad de la población a la derecha de dicho punto. Dado que la población se distribuye de manera uniforme, partimos de la función de densidad, que para la distribución normal en el intervalo $[0, 1]$, es una constante e igual a 1. De tal manera, que la demanda que enfrenta la empresa A es la población acumulada en el intervalo $[0, \tilde{x}]$, mientras que la demanda que emprsa la empresa B es la población acumulada en el intervalo $[\tilde{x}, 1]$:

$$D_A(p_A, p_B) = \int_0^{\tilde{x}} 1\,dz = z\mid_0^{\tilde{x}} = \frac{p_B - p_A + t}{2t}$$

$$D_B(p_A, p_B) = \int_{\tilde{x}}^1 1\,dz = z\mid_{\tilde{x}}^1 = \frac{p_A - p_B + t}{2t}$$

Notamos que las dos funciones dependen negativamente de su propio precio (ley de la demanda), y por otra parte, dependen positivamente del precio del rival (los bienes son sustitutos). Esto quiere decir que aunque el bien es un sustituto, las empresas encuentran un factor de diferenciación entre ellas de conformidad con la ubicación en la que están. Para un consumidor, una tienda de autoservicio ubicada a 100 metros de su casa no es lo mismo que una tienda de autoservicio, con los mismos productos, ubicada a 10 kilómetros de su casa.

Un aspecto relevante del modelo de Hotelling es que la distancia no tiene sólo una interpretación geográfica, sino que puede tratarse de cualquier indexación de cualquier cualidad sobre la cual haya lugar a la diferenciación, como puede ser la calidad, o la facilidad de uso. Así, el costo de transporte de td^2 no necesariamente se refiere el costo de tomar un auto o una bici y llegar a la tienda, sino que puede representar el costo de adaptarse a un nuevo producto según a lo que estamos acostumbrados, o adaptarse a nuevas tecnologías considerando el nivel de conocimiento en el que estamos. No obstante, para efectos, seguiremos con la consideración de la ciudad lineal.

Anteriormente habíamos dicho que la demanda está cubierta. Esto quiere decir que el consumidor indiferente tiene que tener una utilidad positiva, sin importar a qué tienda se acerque, por lo que las tiendas podrían elevar el precio infinitamente (un supuesto que puede ser eliminado para modelos más sofisticados). Los beneficios de cada empresa son la diferencia del precio menos el costo, multiplicado por la cantidad vendida. Aquí como las empresas saben que tienen cierto poder de mercado, sustituyen la cantidad por la demanda que cada una enfrenta. Lo haremos inicialmente para la empresa A, y por simetría podemos seguir con la empresa B.

$$\Pi_A = (p_A - c)D(p_A, p_B) = (p_A - c)\frac{p_B - p_A + t}{2t}$$

Una vez teniendo los beneficios de cada empresa, podemos escribir su problema de maximización. Cada empresa puede decidir su precio, pero dependerá del precio de la otra empresa, por lo que el problema de maximización nos dará como resultado una función de mejor respuesta: la mejor respuesta que la empresa A puede tener al precio que fije la empresa B:

$$\max_{p_A}(p_A - c)\frac{p_B - p_A + t}{2t}$$

Derivando e igualando a cero la expresión anterior podemos encontrar algo de la forma:

$$\frac{p_B - p_A + t}{2t} - \frac{1}{2t}(p_A - c)$$

Despejando para p_A la expresión anterior, obtenemos que:

$$p_A = \frac{p_B + t + c}{2}$$

De la expresión anterior podemos ver que la función de mejor respuesta de A al precio de B es subir su precio. Esto es, si el competidor eleva su precio, le permite a la otra empresa elevar el suyo y hacerse de una parte de estas ganancias. Por otra parte, depende positivamente de t. Recordemos que t es una medida del costo de transporte, por lo que dos tiendas separadas pueden cobrar precios más altos, ya que a alguien cercano a nuestra tienda prefiere pagar ese precio más alto, que incurrir en el elevado costo de transportarse hasta la otra tienda. Esto se deriva, claro, también del hecho de que asumimos que s es suficientemente grande, por lo que sin importar el precio, los consumidores comprarán el producto. Este supuesto, claramente, puede no hacer sentido. Finalmente, tenemos que el precio depende positivamente del costo. Lo anterior, como siempre, si se eleva el costo, subimos el precio para recuperar ese incremento en costo.

Como supusimos que las empresas eran simétricas (mismo costo de producción), sabemos que los precios son iguales (y si no me creen, pueden obtener la función de mejor respuesta para B y descubrirlo por ustedes mismos). Sabiendo esto, y despejando, obtenemos que el precio que cada empresa fijará será:

$$p_A = p_B = t + c$$

Recordemos que en este juego, las empresas compiten en precios (al maximizar, deciden precio), aunque la distancia entre ellas les da cierta diferenciación. Si no existiera costo de trasladarse (si $t = 0$), entonces no habría diferencia entre ambas empresas, y venderían un producto homogéneo. Como las empresas están compitiendo en precios, si no hay diferenciación, notamos de la ecuación anterior que el precio sería igual al costo marginal c, y nos encontraríamos en el juego de Bertrand.

Ya con los precios de equilibrio, podemos obtener las cantidades de equilibrio. En primer lugar, notamos que como $p_A = p_B$, entonces el consumidor indiferente se encuentra exactamente a la mitad de la ciudad ($\tilde{x} = 1/2$). Asimismo, de las funciones de demanda, notamos que cada Empresa atiende a la mitad de la demanda ($D_A = D_B = 1/2$). Finalmente, los beneficios de cada empresa serían iguales a $t/2$. Esto quiere decir que a mayor costo de distancia o mayor diferenciación, mayores serán los beneficios de las empresas.

Se deja al lector seguir el mismo procedimiento, considerando que A y B están ubicados en el mismo lugar, por ejemplo en 1/2. Hay que considerar, en este caso, que los consumidores de A y los de B ahora pueden provenir de la izquierda o la derecha, por lo que hay que plantear con cuidado la función de utilidad. Como resultado, debería de obtenerse que, al no haber diferenciación entre ambas tiendas, las empresas tendrán el mismo precio igual al costo marginal, los beneficios serían de cero para ambas, y, para efectos, juegan a Bertrand.

Se deja también al lector seguir el proceso, pero asumiendo que los costos de transporte, en lugar de ser cuadráticos (td^2), estos son lineales (td). ¿Cómo cambian los resultados?

3.3.1.2 Ubicación endógena de las tiendas

Seguimos jugando a Hotelling, pero ahora lo haremos en dos períodos. En el primer período, las tiendas deciden en dónde colocarse, mientras que en el segundo período, estas compiten a la Hotelling. Por simplificar, y sin pérdida de generalidad, suponemos que la empresa A se va a colocar a la izquierda de la empresa B.

Ciudad lineal con ubicación endógena



Como todo juego dinámico, para encontrar el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, lo podemos hacer mediante inducción hacia atrás, por lo que nos vamos al último período.

Último Período: Competencia de Hotelling

A diferencia del ejemplo planteado anteriormente, los consumidores de A y de B pueden provenir de la izquierda o de la derecha, por lo que tenemos que calcular su distancia ya no a un extremo de la ciudad (0 o 1), sino que tenemos que calcular su distancia a la ubicación correcta de la tienda (a o b). Así, como vemos en la gráfica anterior, alguien ubicado en x si está a la izquierda de a tiene una distancia a la tienda A de $a - x$, mientras que si x está a la derecha de la tienda, su distancia a A sería de $x - a$. Algo similar ocurre para la tienda B.

Una vez más, encontramos al consumidor indiferente. Este consumidor va a estar necesariamente a la derecha de A por lo que su utilidad de consumir en A será:

$$u(A) = p_A + t(\tilde{x} - a)^2$$

Asimismo, este consumidor indiferente estará necesariamente a la izquierda de B, por lo que la utilidad de consumir en B será de:

$$u(B) = p_B + t(b - \tilde{x})^2$$

Nuestro consumidor indiferente está ubicado entonces en $\tilde{x}$, en donde $\tilde{x}$ se despeja de igualar $u(A) = u(B)$. Igualando estas dos funciones y despejando para $\tilde{x}$ obtenemos que:

$$\tilde{x} = \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{(a+b)}{2}$$

Hagámos un breve paréntesis. En este ejemplo, estamos generalizando la ubicación de las empresas para culquier ubicación, por lo que si este es el caso general, entonces el resultado tiene que ser igual al caso particular haciendo las sustituciones correspondientes. Así, si suponemos que $a = 0$ y $b = 1$, significaría que la tienda A está en el extremo izquierdo, y la empresa B en el extremo derecho, lo cual nos llevaría al caso anterior (caso particular). Sustituyendo $a = 0$ y $b = 1$ en la función anterior nos da como resultado:

$$\tilde{x} = \frac{p_B - p_A + t}{2t}$$

La expresión anterior corresponde con la del consumidor indiferente en el caso de los extremos que vimos en la subsección anterior. Lo anterior nada más sirvió para corroborar que fuéramos en bueno camino. Ahora continuemos con el procedimiento.

Una vez más, y considerando que todos a la izquierda del consumidor indiferente consumirán de A y todos a la derecha del consumidor indiferente consumirán de B, obtenemos las funciones de demanda como:

$$D_A(p_A, p_B) = \int_0^{\tilde{x}} 1\,dz = z\,|_0^{\tilde{x}} = \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{(a+b)}{2}$$

$$D_B(p_A, p_B) = \int_{\tilde{x}}^{1} 1\,dz = z\,|_{\tilde{x}}^{1} = \frac{p_A - p_B}{2t(b-a)} + \frac{2-(a+b)}{2}$$

Claramente a los economistas, cuando estamos ante funciones simétricas, nos gusta llegar a expresiones simétricas tras resolverlas. Por lo que tantita álgebra a las expresiones anteriores nos da:

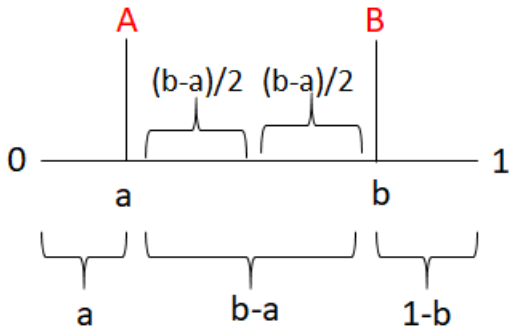
$$D_A(p_A, p_B) = \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{b-a}{2} + a$$

$$D_B(p_A, p_B) = \frac{p_A - p_B}{2t(b-a)} + \frac{b-a}{2} + (1-b)$$

La interpretación de las funcionesa anteriores es muy sencilla. El término al final (a para la demanda de A, y $1-b$ para la demanda de B) quiere decir que, en principio, cada uno de las empresas va a acaparar toda la demanda que tengan en su extremo (sus consumidores cautivos). Esto es, A acaparará toda la demanda entre 0 y a, que por la función de distribución equivale a a, mientras que B acaparará toda la demanda de su entre b y 1, que por la función de distribución, es $1-b$.

El término de en medio ($(b-a)/2$) significa una vez más que, en principio, cada demandante se llevará la mitad de los clientes que estén entre sus respectivas tiendas. El número de clientes en este espacio es $b-a$, por lo que cada quién se llevaría la mitad de éstos.

Composición de la demanda de cada tienda



Finalmente, el primer término que aparece en las demandas es la razón de la demanda que cada empresa se gana en función de la diferencia de precios. Notemos que a mayor precio del competidor, mayor demanda de cada empresa, y viceversa. Asimismo, cumple con la ley de la demanda: la demanda depende negativamente del propio precio. Cuando ambas empresas fijan el mismo precio, el primer término de las respectivas funciones de demanda desaparece, y cada una se lleva lo que esté más cercano a las mismas.

Para encontrar las funciones de mejor respuesta, resolvemos los respectivos problemas de maximización para cada empresa. En particular, para la empresa A, ésta resuelve:

$$\max_{p_A}(p_A - c)D_A(p_A, p_B) = (p_A - c)\left(\frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{b-a}{2} + a\right)$$

De las condiciones de primer orden de la maximización del problema anterior, obtenemos la función de mejor respuesta de la empresa A, misma que está dada por:

$$p_A = at(b-a) + \frac{t(b-a)^2}{2} + \frac{p_B + c}{2}$$

Resolvemos el problema de maximización para el agente B:

$$\max_{p_B}(p_B - c)D_B(p_A, p_B) = (p_B - c)\left(\frac{p_A - p_B}{2t(b-a)} + \frac{b-a}{2} + (1-b)\right)$$

De las condiciones de primer orden de la maximización del problema anterior, obtenemos la función de mejor respuesta de la empresa B, misma que está dada por:

$$p_B = (1-b)t(b-a) + \frac{t(b-a)^2}{2} + \frac{p_A + c}{2}$$

Lo anterior nos deja con un complejo sistema de dos ecuaciones con dos variables (p_A y p_B). Con algo de paciencia, podemos llegar a las siguientes dos expresiones:

$$p_A^*(a,b) = c + t(b-a)^2 + \frac{2}{3}t(b-a)(2a + (1-b))$$
$$p_B^*(a,b) = c + t(b-a)^2 + \frac{2}{3}t(b-a)(a + 2(1-b))$$

De las dos ecuaciones anteriores notamos, en primer lugar, que si las tiendas se ubican en el mismo punto, entonces significa que $b = a$, por lo que no hay diferenciación y los precios se igualan al costo marginal, y nuevamente estamos en Bertrand. Asimismo, notamos que los precios dependen positivamente del costo de traslado, que ya lo habíamos concluído anteriormente. Asimismo, observamos que los precios también dependen de la distancia entre las tiendas, esto es, depende de la expresión $b - a$. Aquí cabe aclarar que existen dos efectos:

- Efecto competencia: Éste efecto está dado por la relación negativa que surge de que a se aproxime a b, Esto es, entre más juntas estén las empresas, menor será el precio que podrán cobrar. Esto lo podemos ver en el segundo término de los precios, donde $t(b-a)^2$ quiere decir que a menor distancia, menor precio, o del otro lado, a mayor distancia, mayor precio.
- Efecto demanda: Por otra parte, existe un efecto dado por la cercanía que tienen las tiendas. Entre más se acerque una tienda a otra, ampliará su base de consumidores cautivos (de su extremo de lado), y canibalizará la demanda que previamente estaba atendiendo la empresa rival. Esto se puede ver por las dos expresiones al final, $2a + (1-b)$ para p_A, y $a + 2(1-b)$ para p_B. Esto quiere decir que mientras más se alejen las empresas de los extremos (más grande sea a o más grande sea $1 - b$), mayor será el precio. Esto se puede ver en la última gráfica "Composición de la demanda de cada tienda"

En el caso en particular, y principalmente porque utilizamos costos cuadráticos (td^2), el efecto competencia será más grande al efecto demanda. Esto es, el acercarse generará mayores pérdidas por la diferenciación, que los beneficios que logra el acercarse y acaparar más demanda. Esto será un resultado importante a continuación.

3.3.2 Primer período: Elección de la ubicación

En los párrafos anteriores hemos encontrado las funciones de mejor respuesta y los precios p_A y p_B que elige cada jugador, que depende de los parámetros t y c, que para efectos del modelo son exógenos, pero que también dependen de los parámetros de ubicación, a y b, que si bien toman como dados las empresas en el segundo período, en el primer período son variables de decisión para las empresas. Entonces, el problema del primer período es maximizar la utilidad de las empresas, eligiendo a, para la empresa A, y b para la empresa B. Recordemos brevemente que, mientras las mayúsculas representan a los agentes/empresas, las minúsculas representan su ubicación dentro de la ciudad lineal.

Sustituyendo los precios de las empresas, que ahora dependen de las respectivas ubicaciones, en las funciones de beneficios, obtenemos algo como:

$$\Pi_A(a,b) = \big(p_A^*(a,b) - c\big)D_A\big(a, b, p_A^*(a,b), p_B^*(a,b)\big)$$

$$\Pi_B(a,b) = \big(p_B^*(a,b) - c\big) D_B\big(a, b, p_A^*(a,b), p_B^*(a,b)\big)$$

Con un poco de álgebra, podemos llegar a que:

$$p_A - c = t(b-a)\frac{2+a+b}{3}$$

$$p_B - c = t(b-a)\frac{4-a-b}{3}$$

$$D_A(p_A, p_B) = \frac{2+a+b}{6}$$

$$D_B(p_A, p_B) = \frac{4-a-b}{6}$$

Sustituimos las 4 funciones anteriores en la fórmula de beneficios de la empresa, y nos quedan los beneficios expresados únicamente en función de la ubicación de las empresas, a y b. Estas son las funciones objetivo para maximizar, en donde la empresa A elige su ubicación a a partir de maximizar sus respectivos beneficios Π_A, y la empresa B elige su ubicación b a partir de maximizar sus beneficios Π_B

$$\begin{aligned} &\max_a \tfrac{2+a+b}{6}\left[t(b-a)\tfrac{2+a+b}{3}\right] \\ &\qquad s.a. \qquad\qquad 0 \le a \le 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max_b \tfrac{4-a-b}{6}\left[t(b-a)\tfrac{4-a-b}{3}\right] \\ &\qquad s.a. \qquad\qquad 0 \le b \le 1 \end{aligned}$$

Las restricciones nos indica que las tiendas tienen que estar dentro de nuestra ciudad lineal, esto es, tienen que estar entre cero y uno. Para facilitar el problema de maximización, recordemos que si un escalar multiplica a toda la función, podemos eliminarlo para simplificarlo. En el caso particular, notemos que cada una de las funciones está siendo multiplicada por $\frac{t}{18}$, por lo que podemos eliminar esto, y los respectivos problemas de maximización nos quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\max_a (b-a)(2+a+b)^2 \\ &\qquad s.a. \qquad\qquad 0 \le a \le 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max_b (b-a)(4-a-b)^2 \\ &\qquad s.a. \qquad\qquad 0 \le b \le 1 \end{aligned}$$

Empecemos con la función objetivo de A. La derivada de los beneficios de A respecto a a es:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial a} = -(a + (2+b))(3a + (2-b)) < 0$$

Dado que a y b son positivos y menores o iguales a 1, podemos concluir que la derivada de los beneficios de A respecto a a es negativa, lo que significa que las utilidades de A decrecen conforme a aumenta. Así, maximizar la utilidad.de A significa minimizar el valor de a. Como las restricciones nos topan a que a esté entre 0 y 1, concluimos que $a = 0$.

Realizamos lo mismo para los beneficios de B.

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial b} = (4 - a - b)(4 + a - 3b) > 0$$

Notamos que como a y b son mayores a 0 y menores a 1, la expresión anterior siempre es positiva en dicho intervalo, por lo que los beneficios de B se incrementan conforme b se incrementa. Como la variable está entre 0 y 1, la utilidad se maximiza cuando esta tienda está en el extremo derecho de la ciudad $b = 1$.

Por lo anterior, considerando los costos de transporte cuadráticos td^2, en nuestra ciudad lineal, lo que más le conviene a las empresas es diferenciarse lo más posible, alejándose lo más posible. A esto se le conoce como principio de diferenciación: las empresas querrán tener un producto lo más diferenciado posible de sus competidores.

Como habíamos mencionado anteriormente, en la competencia a la Hotelling existe un efecto demanda y un efecto competencia. El efecto demanda hace que acercarse permita acaparar mayor demanda y aumentar beneficios, pero el efecto competencia hace que acercarse signifique menor diferenciación, y por tanto menor poder de elevar precio. Con los costos cuadráticos, el efecto competencia domina al efecto demanda, es decir, las pérdidas que cada empresa sufre al bajar el precio por acercarse tantito son mayores a los beneficios que obtiene por acaparar más demanda, por lo que las empresas deciden diferenciarse.

Queda al lector realizar la práctica, pero con costos lineales, esto es, con un costo de transporte igual a td. Al ser el costo de transporte tan bajo, el lector podrá apreciar que el efecto demanda domina al efecto competencia, por lo que las empresas decidirán acercarse más, hasta que eventualmente estén juntas y a la mitad de la ciudad lineal. En este escenario, al no haber diferenciación, las empresas cobrarán un precio igual al costo marginal, y estaremos en un escenario de Bertrand. A este resultado se le conoce como Ley de Hotelling (no confundir con Regla de Hotelling), o principio de mínima diferenciación.

Este resultado de mínima diferenciación es, sin duda, una paradoja, pues en la realidad observamos que los productos están diferenciados. Hay diversas maneras de superar esta paradoja. Una de ellas es cambiar la ciudad de lineal a circular (modelo de Salop); si bien esto supera la paradoja para un caso geográfico, pues las personas pueden rodear cuadras y no únicamente caminar en una dirección, para casos de diferenciación en alguna dimensión propia del producto esto no se puede (una cerveza no puede tener tantas calorías y de repente aumentar una caloría más la lanza a cero calorías). Otra manera es limitar la disponibilidad de pago de los consumidores; si hay una restricción de que los consumidores no están dispuestos a pagar más de determinada cantidad, ésta podría ocasionar cierta diferenciación. Si bien estas alternativas están más estudiadas, diferentes especificaciones respecto a los costos de transporte (por ejemplo, con discontinuidades) o distribuciones de los consumidores distintas a la uniforme igualmente pueden eliminar la paradoja.

Como hemos visto, si las empresas deciden diferenciarse mucho o poco dependerá de la estrutura de los costos de transporte. Estos costos de transporte pueden verse de distintas maneras, y no sólo geográficamente. El costo de transporte puede ser pasar de una tecnología a la que se está acostumbrado, a una tecnología similar o a una muy distinta. Dependiendo de cómo se comporten estos costos para acostumbrarse a una nueva tecnología dependerá el grado de diferenciación que quieran las empresas. Esta es la razón por la cuál a menudo encontramos dos cafeterías una al lado de la otra, ya que éstas prefieren estar en el centro de la demanda (en un lugar de oficinas, por ejemplo), o por qué dos gasolineras están una en contraesquina de la otra. No obstante, ocurre a menudo el caso contrario en el que algunas tiendas como Costco y Sam's prefieran estar a lados contrarios de la ciudad. Una vez más, depende de la estructura de los costos.

3.3.1.3 Óptimo Social en Hotelling

Para encontrar el óptimo social para la ubicación de las empresas, tenemos que considerar que el total de s no cambia, por el supuesto de que la demanda está cubierta en su totalidad. Asimismo, el costo en el que se incurre c no cambia, ya que las empresas venden sus unidades a todos los consumidores, una vez más, por el supuesto de que la demanda está cubierta. Por otra parte, el precio que paga un consumidor lo recibe el empresario a quien le es comprado el bien, por lo que en la función de beneficio social (suma de utilidad neta de los consumidores más los beneficios de los productores), éste precio se netea y desaparece. Por lo tanto, el único factor importante es el costo de transporte que se actualiza una vez que se colocan las empresas en alguna ubicación, por lo que maximizar la utilidad social corresponde a minimizar los costos de transporte.

Sabiendo lo anterior, podemos centrarnos únicamente en este problema de minimizarión.

Por un lado, tenemos que minimizar los costos de transporte de aquellos que compran de A y se encuentran a la izquierda de la tienda, cuya distancia a la misma está dada por $(a-x)$, así como la de quienes le compran a A, pero se encuentran a la derecha, y cuya distancia a dicha tienda está dada por $(x-a)$. Igualmente, los que se encuentran a la izquierda de la tienda B y le compran a ésta tienen una distancia a la misma de

$(b-x)$, mientras que los que se encuentran a la derecha tiene una distancia de $(x-b)$.

Figure 1: Elección óptima de la ubicación de las tiendas



Asumimos, por facilidad, que los que se encuentran en el respectivo extremo de cada tienda son consumidores cautivos de la misma, y forzosamente le compran a ésta, por lo que todos los ubicados entre 0 y a se transportan a a para comprarle a A, y todos los ubicados entre b y 1 se transportan a b para comprarle a B. No obstante, para aquellos que están a la mitad de ambas tiendas, tenemos que encontrar la ubicación del consumidor que está indiferente entre comprarle a A y comprarle a B. Esto, ya que todos a la izquierda del consumidor indiferente le comprarán a A y será su demanda atendida, y todos a la derecha del consumidor indiferente le comprarán a B y será su respectiva demanda atenidda.

El costo social de alguien ubicado entre a y b si le compra a A está dado por:

$$s - t(x-a)^2 - c$$

Mientras que el costo social que ocasiona este mismo sujeto, si le compra a B está dado por:

$$s - t(b-x)^2 - c$$

Igualamos estas dos expresiones y despejamos x para obtener x la ubicación del consumidor indiferente, y obtenemos que la ubicación $\tilde{x}$ del consumidor indiferente está en:

$$\tilde{x} = \frac{a+b}{2}$$

Esto es, el consumidor indiferente estará exactamente a la mitad entre ambas tiendas.

Una vez que tenemos lo anterior, conocemos ya los límites de integración. A atenderá a (1) todos los que se encuentren a la izquierda, y (2) a todos los que se encuentren a su derecha, pero a la izquierda de $\tilde{x}$. Por su parte, B atenderá a (4) todos los que se encuentren a su derecha, y a (3) todos los que se encuentren a su izquierda, pero a la derecha de $\tilde{x}$. Por lo que nuestro problema de minimización está dado por:

$$\min_{a,b} \int_0^a t(a-z)^2\,dz + \int_a^{\tilde{x}} t(z-a)^2\,dz + \int_{\tilde{x}}^b t(b-z)^2\,dz + \int_b^1 t(z-b)^2\,dz$$

Los números entre paréntesis en el párrafo anterior equivalen al número consecutivo de las integrales del problema de minimización anterior.

Las integrales anteriores son polinomios, los cuales se pueden resolver fácilmente y ser evaluados en los respectivos límites. Una vez realizado lo anterior, nos queda una expresión de la siguiente manera:

$$\min_{a,b} \left[\frac{a^3}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \frac{(1-b)^3}{3} \right]$$

Resolviendo el problema de maximización anterior, obtenemos que las ubicaciones de las tiendas que minimizan los costos son $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{3}{4}$. Con lo anterior, nos aseguramos que el consumidor más lejano a cualquier tienda esté a tan solo $\frac{1}{4}$ de distancia, lo cual minimiza los costos sociales. No obstante que esta configuración es un óptimo de Pareto, no forma parte de un equilibrio de Nash ya que, como vimos, cada empresa decide alejarse cada vez más ya que el efecto comptetencia domina al efecto demanda.

3.3.3 Diferenciación vertical: modelo de Mussa-Rosen

En 1978, Michael Mussa y Sherwin Rosen publicaron un ensayo en el que proponen cómo resolver un problema de un monopolista que puede lanzar un producto en distintas calidades. El monopolista conoce la distribución de las preferencias, pero no puede distinguir entre cada uno de los consumidores individualmente. En este sentido, la calidad elegida considerará esta incertidumbre sobre la disponibilidad de pago.

Si bien el modelo fue planteado para el caso de un monopolio, éste se puede plantear para un oligopolio obteniendo dos demandas distintas. Éstas se pueden resolver posteriormente como si se tratara de dos empresas distintas. Al igual que en Hotelling, el modelo se puede plantear sólo en la última etapa, una vez que la calidad de cada productor esté determinada y el equilibrio de Nash en precios, y posteriormente se puede obtener, por inducción hacia atrás, el equilibrio de Nash en calidad. En esta ocasión, sólo resolveremos el equilibrio en precios, tomando las calidades como exógenas.

Comenzaremos por suponer que existen dos productores del mismo bien, A y B, y es sabido que la calidad de A, K_A sobre determinada dimensión es mejor que la calidad de B, K_B: $K_A > K_B$. Esto es sabido por los consumidores, de tal manera que todos prefieren A a B, pero difieren en la intensidad de sus preferencias. Asumimos que estas preferencias se determinan por el parámetro θ, mismo que se distribuye uniforme entre el intervalo $[a, b]$. La utilidad bruta de los consumidores va a estar dada por su parámetro de intensidad de preferencia mutliplicada por la calidad del producto; la utilidad neta será la utilidad bruta menos el precio. Como habíamos mencionado, cada consumidor compra exactamente una unidad del producto. Entonces:

$$U = \begin{cases} \theta K_i - P_i & \text{si compra el producto } i \\ 0 & \text{si no compra ningún producto} \end{cases}$$

donde $i \in \{A, B\}$, y P_i denota el precio del producto de la empresa i. θ es la utilidad marginal de la dimensión de diferenciación K, por ejemplo, calidad. Así, si bien para todos los consumidores, mejorar la calidad mejora la utilidad, para algunos consumidores, el incremento marginal en la utilidad será menor.

Asimismo, producir el bien de mayor calidad es más caro. Asumimos costos marginales constantes, de tal suerte que el costo de A, c_A es mayor al costo de B, c_B: $c_A > c_B$. Este problema se puede resolver de manera similar al de Hotelling, aunque aquí será importante una distinción: es posible que haya consumidores que no consuman ningún producto.

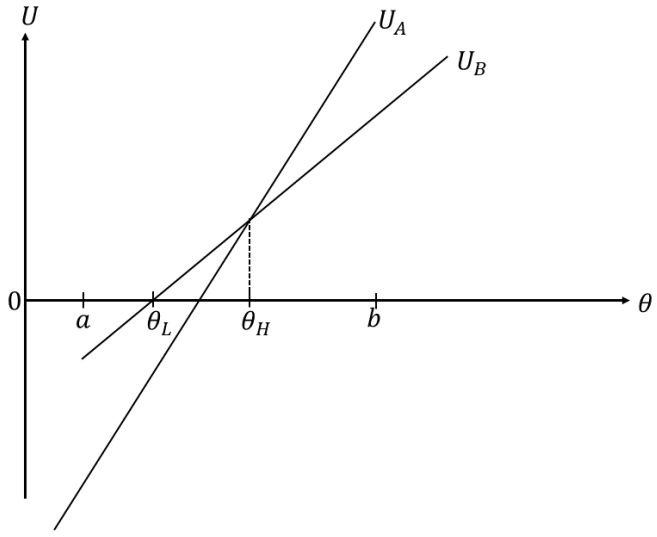


Figure 2: Utilidad en el modelo de Mussa-Rosen

Para comenzar, como la distribución de la intensidad de preferencias θ es continua, hay consumidores que, para determinado nivel de precios P_A y P_B, estarán indiferentes entre A y B, y habrá consumidores indiferentes entre B y ningún producto. Denotamos al consumidor indiferente entre A y B como el consumidor θ_H, y al consumidor indiferente entre el producto B y no consumir el producto como θ_L. Gráficamente podemos denotar esto como:

En la gráfica anterior, U_A denota la utilidad que un agente con intensidad de preferencia θ tendría por consumir el bien de calidad K_A, mientras que U_B se refiere a la utilidad que tendría un consumidor tipo θ por consumir el bien de calidad K_B. Recordemos que la utilidad es lineal, y como $K_A > K_B$, la pendiente es más empinada para U_A que para U_B. En esta gráfica asumimos, por ahora, que $P_A > P_B$, y por tanto la ordenada al origen, dada por $-P_A$ para U_A y por $-P_B$ para U_B es más baja para U_A que para U_B. No obstante, si bien K_i es una variable exógena, P_i es endógena, por lo que θ_L y θ_H dependerán ultimadamente de los precios que fijen las empresas.

De la gráfica anterior, notamos que para todos los consumidores con intensidad de preferencias ubicada entre θ_H y b, éstos obtienen mayor utilidad del bien de calidad K_A, mientras que los consumidores entre θ_L y θ_K adquieren el bien de calidad K_B. Los consumidores entre a y θ_L están mejor no consumiendo ninguno de los productos. Esta es, entonces, la demanda que enfrenta cada empresa.

Para obtener θ_L, basta con igualar $U_B = 0$, mientras que para obtener θ_H igualamos $U_A = U_B$:

$$\begin{aligned} \theta_H K_A - P_A = \theta_H K_B - P_B \qquad &\implies \theta_H = \frac{P_A - P_B}{K_A - K_B} \\ \theta_L K_B - P_B = 0 \qquad &\implies \theta_B = \frac{P_B}{K_B} \end{aligned}$$

Entonces, la demanda de A va a estar dada por $b - \theta_H$, mientras que la demanda por B va a estar dada por $\theta_H - \theta_L$:

$$\begin{aligned} Q_A = b - \theta_H = & b - \frac{P_A - P_B}{K_A - K_B} \\ Q_B = \theta_H - \theta_L = & \frac{P_A - P_B}{K_A - K_B} - \frac{P_B}{K_B} \end{aligned}$$

Una vez teniendo las demandas en función de los precios, podemos plantear el problema de maximización y obtener las funciones de mejor respuesta para cada empresa. Para la empresa A:

$$\max_{P_A} \qquad \left(b - \frac{P_A - P_B}{K_A - K_B} \right) (P_A - c_A)$$

Obteniendo las CPO (recordar, sólo derivamos respecto a P_A), y despejando para P_A:

$$P_A(P_B, K_A, K_B, c_A, c_B) = \frac{1}{2} \left[b(K_A - K_B) + P_B + c_A \right]$$

Para la empresa B:

$$\max_{P_B} \qquad \left(\frac{P_A - P_B}{K_A - K_B} - \frac{P_B}{K_B} \right) (P_B - c_B)$$

Obteniendo las CPO (sólo derivamos respecto a P_B), y despejando P_B:

$$P_B(P_A, K_A, K_B, c_A, c_B) = \frac{1}{2} \left[\frac{K_B}{K_A} P_A + C_B \right]$$

El equilibrio de Nash está caracterizado por las funciones de mejor respuesta. El álgebra después de esto se vuelve un tanto tediosa, pero podemos inferir de las funciones de mejor respuesta que incrementos en los costos incrementan ambos precios (por ejemplo, un aumento en c_A incrementa P_A, lo cual aumenta P_B, lo cual como efecto de segundo orden vuelve a incrementar P_A). Asimismo, los precios son crecientes en su propia calidad.

Un caso relativamente interesante se da cuando en la baja calidad hay mucha competencia (por ejemplo, es fácil y barato producir), pero en la calidad alta hay un monopolio. Entonces $P_B = c_B$ para la baja calidad, y el análisis se puede hacer para P_A sustituyendo c_B en lugar de P_B en la función de mejor respuesta de A.

4 Juegos Dinámicos

La limitante principal de los juegos estáticos es que no modelan cómo los agentes ajustan su curso de acción una vez que se allegan de mayor información. Esto es importante, pues poder allegarse de mayor información es más la regla que la excepción entre las interacciones estratégicas de los agentes. Modelar ciertos juegos como dinámicos en lugar de estáticos nos permite encontrar equilibrios únicos, entender conceptos de amenazas creíbles y amenazas no creíbles, entre otras nociones.

En esta sección, analizaremos a grandes razgos los juegos dinámicos conocidos como de "información perfecta", y entre los cuales distinguiremos entre juegos de "información completa" y juegos de "información incompleta". Es importante aclarar que, pese a que suenen parecidos en el lenguaje coloquial, los conceptos de información completa e información imperfecta son distintos. La noción de información perfecta alude a que los agentes conocen el "tipo" de jugador al que se están enfrentando; esto es, los jugadores saben exactamente las acciones que los demás jugadores tienen, y los pagos o utilidad asociada a cada curso de acción. La información completa se refiere a que los jugadores pueden observar claramente las acciones pasadas.

Esto quedará más claro adelante. Pero primero, debemos introducir conceptos de información.

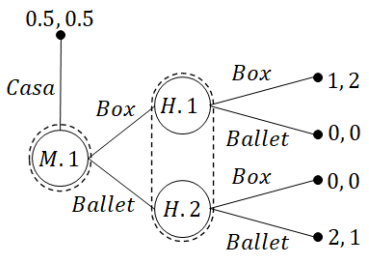
4.1 Información

La información es crucial para los juegos, pues determinan las creencias que tienen los agentes sobre las afectaciones sobre sus acciones a los demás, y por tanto afectan la estrategia que van a tomar. Siendo que la teoría de juegos estudia la interacción estratégica de los agentes, es imposible sobreestimar la importancia de la información.

¿Por qué no la habíamos introducido antes? Para evitar introducir demasiados conceptos rápidamente. Es importante tener los conceptos anteriores claros, antes de proceder. No obstante, detrás de los juegos estáticos han estado diversos supuestos sobre la estructura de la información con la que cuentan los agentes. Con los juegos dinámicos se vuelve neceario explicitar estos supuestos.

Empezaremos con un juego dinámico, concretamente con la batalla de los sexos, pero la convertiremos en un juego dinámico de la siguiente manera. Primero, la mujer decide si quiere salir el sábado en la noche, al box o al ballet, o prefiere quedarse en casa. Si decide quedarse en casa, los pagos serán de 0.5 para ambos agentes. Si decide salir el sábado en la noche, entonces el hombre y la mujer se encuentran en la batalla de los sexos descrita anteriormente. El hombre sólo sabe si la mujer salió o no, pero no sabe a dónde salió (por ejemplo, puede que haya tenido que ir al trabajo en sábado, pero al regresar, sólo puede observar si la mujer sigue en la casa o salió, pero si salió, no sabe a dónde fue). Asumimos igual que, si la mujer decide quedarse en casa, el hombre no puede decidir si salir o no.

Si bien se puede representar el juego de manera matricial, los juegos dinámicos en general los representaremos de manera extendida (árbol de juego). En concreto, éste árbol de juego se ve así:



Algunas definiciones (ver Rasmusen):

- Nodos, que pueden ser, de manera no excluyente:
  - Nodo de acción: nodos en donde los agentes deciden qué acción tomar, y que están representados en nuestro juego con los círculos que dentro tienen escrito $M.1$, $H.1$ o $H.2$.
  - Nodo terminal: aquellos que indican el fin del juego. Están representados por los puntos negros, y seguidos de los pagos.
  - Nodos sucesores al nodo X: nodos que pueden ocurrir sólo si anteriormente se llegó a X.
  - Nodos predecesores al nodo X: nodos que requieren ser alcanzados antes de llegar al nodo X.
  - Nodo inicial: nodo que no tienen ningún antecesor.
  - Nodo terminal: nodo que no tiene ningún sucesor. Los representamos en el juego anterior con puntos negros.
- Ramas, que indican las acciones que los agentes pueden tomar en cualquier momento
- Sendero: secuencia de nodos y ramas desde un nodo inicial hasta un nodo terminal

Entonces, un juego de forma extendida es una descripción que se compone de:

1. Una configuración de nodos y ramas sin bucles cerrados, que parte de un único nodo inicial y hasta todos sus nodos terminales.
2. Referencia a cuál nodo corresponde a cada jugador. En el juego anterior, los nodos denotados con $H.$ pertenecen al hombre, mientras que $M.$ se refieren a los que pertenecen a la mujer.
3. Los conjuntos de información en que se dividen los nodos de cada jugador. En nuestro juego, los conjuntos de información están denotados por los círculos punteados. Definiremos conjunto de información más adelante.
4. Los pagos (utilidades) de cada jugador tras cada nodo terminal.

Rasmusen incluye las probabilidades de que la naturalieza decida cada nodo. Esto se conoce como juegos de información incompleta, los cuales no trataremos en esta nota.

Un árbol de juego es igual que la forma extendida, aunque remplazamos los pagos por el resultado del juego.

Como hemos anticipado, la información es crucial para la teoría de juegos. En concreto, definimos como conjunto de información al conjunto de nodos en donde cada jugador cree que puede estar ubicado, pero entre los que no puede distinguir. Estos conjuntos de información los denotamos en la forma extendida como los círculos punteados (llamados nubes). Notamos que hay uno que rodea a $M.1$, y uno que rodea a $H.1$ y $H.2$. Esto quiere decir que el hombre sabe que la mujer sabe que o fue al box o al ballet (y por tanto no se quedó en casa), pero no sabe exactamente a cuál fue. Entonces, el conjunto de información de la mujer es $\{M.1\}$, el cual es unitario (sólo tiene un nodo como elemento). El conjunto de información del hombre, después de que la mujer decidió salir, es $\{H.1, H.2\}$. Cuando los conjuntos de información son unitarios, omitirenis el círculo punteado de la forma extendida (sólo lo pusimos en el juego anterior para ejemplificar).

Es importante aclara que, cuando los conjuntos de información no son unitarios (por ejemplo, el hombre sabe que la mujer o fue al box o fue al ballet), las acciones disponibles en cada nodo dentro del conjunto de información tienen que ser idénticas (box o ballet). Esto se debe a que, de haber acciones diferentes tras algún nodo, el agente podría distinguir en qué nodo está.

Hasta ahora, el supuesto inicial es que los agentes saben la forma del juego. En el ejemplo anterior, descartamos que la mujer haya salido a caminar al parque sin que el hombre supiera que esa era una potencial acción en el nodo inicial. No sólo eso, sino que cada agente sabe que el otro agente conoce la forma del juego, y cada agente sabe que el otro agente sabe que conoce la forma del juego, y así a infinito. A esto se le denomina conocimiento común (*common knowledge*).

Ahora hay que distinguir entre los tipos de información que se puede tener. Estos son:

1. Información perfecta: todos los conjuntos de información son unitarios (*singletons*). Esto es, cada que algún jugador realiza una acción, el jugador anterior la puede observar perfectamente. En nuestra representación gráfica, no hay nubes que abarquen 2 o más nodos. Por extensión, un juego de información imperfecta es aquél en que al menos un conjunto de información no es unitario.

   La información perfecta es el supuesto más estricto que podemos imponer sobre un juego, pues en cada momento los jugadores saben en dónde están situados.

2. Información cierta: se trata de los juegos en donde la naturaleza no "juega" después de los jugadores. Le llamamos naturaleza, en realidad, a las afectaciones introducidas por medios distintos a las acciones de los jugadores. Cuando la naturaleza mueve después que los jugadores, le llamamos juegos de información incierta.

3. Información simétrica: juegos en donde los conjuntos de información en nodos de acción o nodos terminales contiene los mismos elementos para todos los jugadores. Lo opuesto son los juegos de información asimétrica.

4. Información completa: la naturaleza no mueve primero (determina el tipo de cada jugador), o si mueve, dicho movimiento es observado por todos los jugadores. Lo opuesto (la naturaleza mueve primero y al menos un jugador no observa dicho movimiento) son los juegos de información incompleta, y el ejemplo más común son los problemas de selección adversa.

En esta nota trataremos, trataremos sólo juegos de información simétrica, cierta y completa, y distinguiremos entonces sólo entre juegos de información perfecta e imperfecta, manteniendo los demás criterios.

4.2 Juegos de información perfecta

Como anticipamos, la información completa significa que los jugadores pueden observar claramente las acciones anteriores de sus rivales al momento de decidir qué acción tomar (saben perfectamente en qué nodo están, pues todos los conjuntos de información son unitarios). Para entender esto claramente, tenemos que introducir elementos que, si bien están presentes en los juegos estáticos, no había sido necesario tratar hasta ahora.

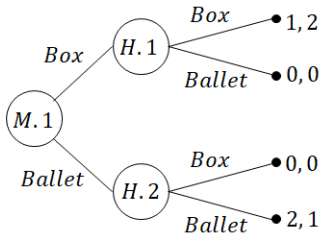
Para comenzar, regresemos al juego de batalla de los sexos estático:

		Hombre	
		Box	Ballet
Mujer	Box	1, 2	0, 0
	Ballet	0, 0	2, 1

En este juego había dos equilibrios de Nash en estrategias puras, a saber, los dos individuos eligen ir al box, o los dos individuos deciden ir al ballet. No obstante, la definición de equilibrio de Nash no nos permitía saber a dónde iban a ir, sino únicamente que, dado que estaban ahí, ninguno de los dos se quería mover unilateralmente. ¿Pero cómo saber si iban a ir al box o al ballet? La teoría de juegos, modelando la interacción como estática, no puede dar una respuesta.

No obstante, lo más probable es que la interacción sea dinámica: una persona elige primero que la otra. Imaginemos el siguiente escenario. La mujer sale de la oficina antes que el hombre, por lo cual se puede acercar al box o al ballet antes. Una vez que elige lugar, le puede marcar al hombre para decirle en dónde está. Es de esperar que la mujer vaya al ballet, le marque al hombre, y que, dado que la mujer está en el ballet, al hombre le convenga acompañarla al ballet y recibir un pago de 1, en lugar de ir al cine y recibir un pago de 0. Así, pasamos de un modelo estático a uno dinámico, en donde la diferencia crucial es que el hombre se allega de información (mediante la llamada) una vez que la mujer tomó su acción.

Representamos este juego de manera extendida:



¿Qué estrategias tienen los agentes? Como anticipamos, la respuesta fácil, rápida, e **incorrecta**, es decir que tanto el hombre como la mujer tienen dos estrategias: o van al ballet, o van al box. Es cierto que sólo tienen dos acciones posibles, y si bien estas acciones corresponden con las estrategias de la mujer (la mujer sí sólo puede elegir box o ballet), el hombre tiene más estrategias; 4 para ser exactos.

Las estrategias deben ser un *plan completo de acción* (*a complete contingent plan*). En lenguaje técnico, una estrategia para el agente i es un plan de acción que asigna, para todos los conjuntos de información en donde i tiene que actuar, alguna de las acciones disponibles para i en dicho conjunto de información. En lenguaje menos técnico, un plan completo de acción nos dice cómo responder a cualquier escenario, incluyendo aquellos que serían descartados por movimientos anteriores.[9] Esto es principalmente importante porque permite establecer amenazas.

Podemos imaginar un plan completo de acción con juegos de cartas o juegos de mesa. Por ejemplo, en un juego de ajedrez, es plantear ex ante una respuesta a cualquier posible movimiento del rival. No sólo eso, sería imaginarse desde antes, plantear el mejor movimiento ante movimientos del rival, incluso si dicho movimiento sería descartado por movimientos previos (cómo me defiendo de la reina, aunque la reina ya no esté en el tablero). Parece poco intuitivo, pero va a ser útil una vez que lleguemos a amenazas no creíbles.

Las estrategias del hombre en esta batalla de los sexos dinámica van a estar dadas por:

$$\left[\begin{pmatrix} Box \\ Box \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Box \\ Ballet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Ballet \\ Box \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Box \\ Ballet \end{pmatrix} \right]$$

En total son cuatro estrategias, cada una denotada al interior del paréntesis. Adentro de cada paréntesis, arriba está la acción a tomar si el hombre está en $H.1$, es decir, si la mujer eligió Box, y abajo la acción a tomar si el hombre está en $H.2$, es decir, la mujer eligió ballet. Podemos interpretar la estrategia en el primer paréntesis como que el hombre está empecinado en ir al Box, el segundo paréntesis es que va a evitar a la mujer, el tercer paréntesis resulta en el hombre ajustándose a la mujer, mientras que el último paréntesis es el hombre empecinado con ir al ballet.

Es importante igual hacer la aclaración, pues es posible modelar otros juegos distintos donde las estrategias cambien según el nodo de decisión en que estén ubicados. Imaginémonos que en primer lugar, la mujer elige un parque de diversiones, y después el hombre decide a qué juego subirse primero. Si la estrategia del hombre fuera nada más "el Superman", esto no tendría sentido si en lugar de Six Flags, fueron a la Feria de Chapultepec.

4.2.1 Equilibrios de Nash

Ahora bien, ¿cómo definimos un equilibrio de Nash? De la misma manera que lo venimos haciendo, sólo que considerando la totalidad de estrategias que se despliegan en el juego, considerando a una estrategia como un plan completo de acción. Para encontrar los equilibrios de Nash es bastante útil utilizar una forma matricial del juego, en lugar de la forma extendida.

Consideremos el juego descrito anteriormente, similar a la batalla de los sexos, pero en el que la mujer elige su estrategia antes que el hombre. En la matriz siguiente tenemos las estrategias de la mujer en las filas, y las del hombre en las columnas:

[9] El ejemplo que doy es, imagínate que sabes que manejando tienes que doblar a la derecha en cierta calle, pero por un *lapsus* giras a la izquierda; una estrategia -plan completo de acción- sería saber de antemano qué harías en caso de que te equivocaras en tus movimientos.

		Hombre			
		Box Box	Box Ballet	Ballet Box	Ballet Ballet
Mujer	Box	**1**, **2**	1, **2**	**0**, 0	0, 0
	Ballet	0, 0	**2**, **1**	**0**, 0	**2**, **1**

Para ubicar los pagos que corresponden en cada celda de la matriz, sólo basta con ubicar que acciones y reacciones están liderando el sendero. Por ejemplo, si la mujer escoge *Ballet* y el hombre escoge (*Ballet*, *Box*), el sendero relevante es que, dado que la mujer escogió ballet, el hombre eligirá box, por lo que los pagos serían de $(0, 0)$, tal y como se ve a partir del diagrama de árbol.

Así, la manera de encontrar el equilibrio de Nash es completamente igual a la que habíamos dicho anteriormente, mismas que marcamos anteriormente. Tenemos 3 equilibrios de Nash. Uno que tiene mucho sentido: si la mujer va al box, el hombre igual, y si va al ballet, el hombre igual. Esto es porque el hombre prefiere estrictamente estar con la mujer que estar solo en un evento. Otro equilibrio de nash es en que el hombre se empecina con ir al ballet. este equilibrio tiene menos sentido, pues el hombre querrá cambiar su acción si la mujer va al box. No obstante, el resultado (*outcome*) es el mismo que en el otro equilibrio de Nash.

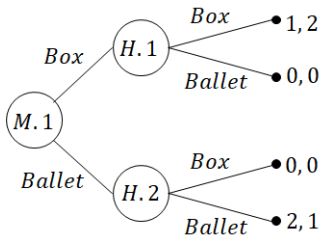
Pero tenemos un equilibrio de Nash que tiene menos sentido, a saber, el hombre se empecina con ir al box, y la mujer entonces también va al box. Esto es, el hombre amenaza con que si la mujer decide cambiar al ballet, él no cambiará y se quedará en el box: esto es, fuerza a la mujer a quedarse en el box. Es una amenaza, pero, ¿es creíble? Si la mujer ultimadamente decide cambiarse al ballet, el hombre, a la hora de la hora, decidirá cambiarse al ballet también.

Sin importar la "amenaza no creíble", esto sigue siendo un equilibrio de Nash, lo que nos lleva a la pregunta, ¿de qué nos sirve, si a la mera hora no predice ni da intuición? Entonces, necesitamos un concepto distinto al equilibrio de Nash, y lo encontramos en los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos.

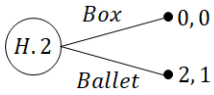
4.2.2 Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos

Ahora bien, desde un inicio habíamos dicho que la mujer escogería ir al teatro, y después al hombre no le quedaría mejor opción que seguirla. No obstante, hay un equilibrio de Nash en el que la mujer elige el teatro. ¿Tiene sentido esto? Como se explicó en párrafos anteriores, esto tiene que ver con que el individuo amenaza con que, si la mujer decide desviarse e ir al teatro, el hombre se quedaría en el cine. ¿Tiene sentido esta amenaza?

Este concepto está relacionado con la credibilidad de las amenazas. Pongámonos en el lugar del hombre por un momento. La mujer nos dice que al final decidió no ir al cine, y mejor ir al teatro. Pese a que el hombre ya decidió ir al cine incluso en este escenario, una vez que la mujer se fue al teatro, el hombre se encuentra ahora en un nodo de decisión en el cual puede cambiar su conducta, pese a lo que originalmente había planeado. ¿Le conviene al hombre ser necio e ir al cine, o ponerse el mandil e ir al teatro? Pondremos de nuevo el gráfico de árbol:



Como vemos, una vez que la mujer decidió ir al teatro, las opciones están acotadas para el hombre, quien ahora está en un "mini juego" en el período posterior. Este "mini-juego" es:



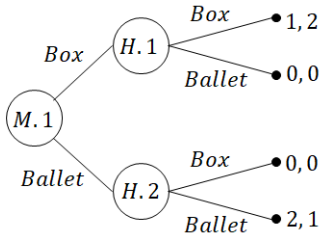
Como notamos, este mini-juego cuenta únicamente con un nodo de decisión, ya que en el pasado la mujer decidió ir al ballet. El hombre entonces tiene la opción entre ir ser necio e ir al box con un pago de 0, o ir al ballet y recibir un pago de 1. ¿Qué le conviene al hombre? Irse al ballet. Entonces, ir al ballet es un equilibrio de Nash para el hombre en este subjuego (maximiza su utilidad, sujeto a las acciones de los demás; en este caso, no hay acciones de los demás agentes, puesto que, como la mujer ya jugó, esto se convierte en un estado fijo, y no una variable de decisión para la mujer). En este sentido, la amenaza del hombre de ponerse terco e ir al box pese a que la mujer cambió de opinión no es creíble.

Esto que llamamos "mini-juego", en realidad se llaman subjuegos.

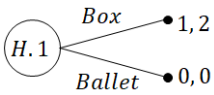
Un subjuego es el juego que se forma a partir de cualquier conjunto de información unitario (*singleton*), y todos los brazos y nodos sucesores hasta los nodos finales. Es importante enfatizar que un subjuego siempre parte de un conjunto de información unitario, y por tanto habrá tantos subjuegos como nodos unitarios haya (el juego completo también es un subjuego, por definición). Recordemos que si hay una nube de información, preguntarse "¿qué haría el hombre si la mujer va al ballet?" no tiene sentido, pues de cualquier manera el hombre no puede saber si la mujer fue al ballet.

Regresemos al juego descrito anteriormente. Éste juego contiene tres nodos de decisión unitarios, y por lo tanto, tres subjuegos:

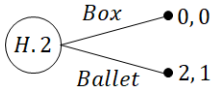
Subjuego 1: Partiendo de $M.1$ (Juego entero)



Subjuego 2: partiendo de $H.1$



Subjuego 3: Partiendo de $H.2$



Definimos entonces un ***equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos*** como aquél en donde los jugadores juegan un equilibrio de Nash en cada subjuego.

En el juego anterior, notamos que en el subjuego 2 (partiendo de $H.1$) el equilibrio de Nash es que el hombre elige box, mientras que en el subjuego 3 (partiendo de $H.1$) el equilibrio de Nash es que el hombre juegue ballet. El equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos tiene que reflejar esta decisión contingente del hombre en el segundo período. Entonces, la estrategia óptima del hombre es:

$$\begin{pmatrix} Box \\ Ballet \end{pmatrix}$$

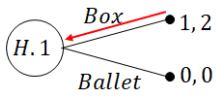
Así, dado que esto es lo que jugará el hombre en los últimos subjuegos, de la forma matricial definida anteriormente notamos que la mejor respuesta de la mujer es ballet. Por lo tanto, si bien existen tres equilibrios de Nash, únicamente un equilibrio de Nash es perfecto en los subjuegos, a saber:

$$\left[\left(\ Ballet \ \right), \quad \begin{pmatrix} Box \\ Ballet \end{pmatrix} \right]$$

Una forma de encontrar los equilibrios de Nash perfectos en los subjuegos es mediante inducción hacia atrás. En este método, lo que hacemos es irnos a los últimos subjuegos (los subjuegos con un solo nodo), y encontrar en éstos el equilibrio de Nash (si sólo una persona decide, entonces la mejor decisión en ese nodo). Una vez que sepamos cuál es el equilibrio de Nash en estos subjuegos, retrocedemos un período y, sabiendo lo que será decidido en el período posterior, encontramos la mejor respuesta en el penúltimo nodo. Una vez conociendo las mejores respuestas en el penúltimo nodo, pasamos al antepenúltimo nodo a encontrar las mejores respuestas. Así continuamos sucesivamente hasta llegar al primer nodo. El equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos nos dirá qué hacer en cada subjuego.

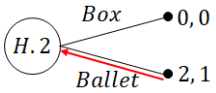
Encontrar el equilibrio perfecto en los subjuegos es muy sencillo si se utiliza los diagramas de árbol, siempre y cuando no existan conjuntos de información con varios nodos de decisión. Vayamos primero a los últimos subjuegos, empezando por el subjuego 2.

Subjuego 2: Partiendo de $H.1$



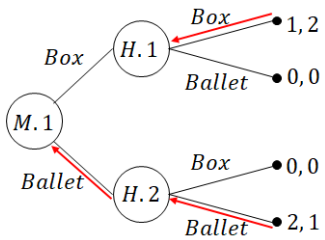
Señalemos con una flecha lo que ocurrirá en ese juego final para indicar el sendero que será elegido. Hagamos lo mismo para el juego 3, y tenemos que:

Subjuego 3: Partiendo de $H.2$



Una vez conociendo esto, regresemos al juego 1, añadiendo las respuestas del último juego. En la siguiente gráfica del juego uno, notamos que ultimadamente, si la mujer decide box en el inicio, su pago será de 1, ya que el hombre escogerá box. Asimismo, si la mujer decide ballet, su pago ultimadamente será 2, ya que el hombre escogerá también ballet. Entonces, la mujer maximiza su utilidad cuando elige ballet, pues ultimadamente tendrá un pago de 2.

Subjuego 1: El juego entero



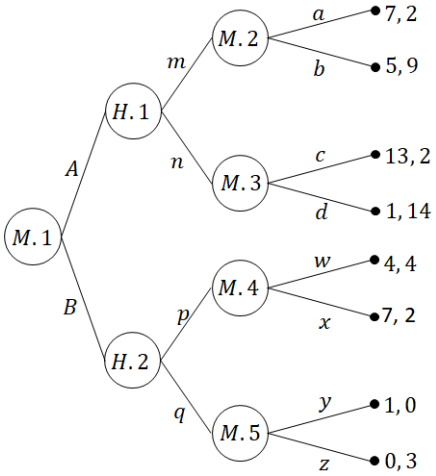
Aún así, la notación del equilibrio de Nash tiene que incluir el plan completo de acción, a saber, que la mujer elegirá bellet, mientras que el hombre eligirá box si la mujer elige box, y eligirá ballet si la mujer elige ballet en el primer período (*¡plan completo de acción!*). De esta manera, el equilibrio perfecto en los subjuegos queda como se mencionó anteriormente:

$$\left[\left(\ Ballet \ \right), \quad \begin{pmatrix} Box \\ Ballet \end{pmatrix} \right]$$

Es un error común señalar que "la mujer va al ballet, y el hombre también va al ballet" como el equilibrio de Nash. No obstante, "la mujer va al ballet, y el hombre también va al ballet" le denominamos **sendero de equilibrio**, y marca el resultado final del juego. No es un equilibrio de Nash, pues un equilibrio de Nash sigue siendo un perfil de estrategias, y una estrategia es un plan completo de acción; decir "el hombre también va al ballet" no es un plan completo de acción, pues no nos dice qué haría el hombre si la mujer decidiera ir al box.

4.2.3 Un ejemplo con más períodos y múltiples ENPS

En la siguiente sección abordaremos un juego de tres períodos y 2 jugadores. Una vez que se comprenda cómo se aborda este problema, será posible abordar fácilmente más períodos o más nodos de información. Al respecto, imaginemos el siguiente juego:

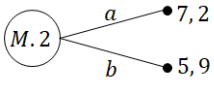


En el juego anterior, la mujer M decide su estrategia en el primer período, el hombre H responde en el segundo período, y la mujer vuelve a elergir en el primer período. Como notamos, en este juego se ejemplicica lo que mencionábamos anteriormente de que el sendero pasado define el universo de posilbilidades de actuación en cada período. Por ejemplo, es imposible que el hombre juegue la estrategia p dado que la mujer jugó A en el primer período.

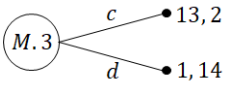
Primero, notamos que tenemos 7 conjuntos de información unitarios (los 7 nodos de acción). Por lo tanto, tenemos 7 subjuegos, incluyendo el juego completo. Cuatro subjuegos están dados por nodos de decisión en el período 3, 2 subjuegos corresponden a nodos en el período 2, y un subjuego corresponde al nodo inicial en el período 1. A continuación mostramos todos los juegos que hay.

Subuegos en el período 3

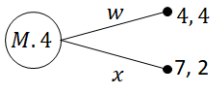
Estos subjuegos son los más sencillos. Cada subjuego lo identificaremos por el conjunto de decisión que lo caracteriza. Aquí, como únicamente hay un período restante, el plan completo de acción corresponde con la acción en el último período. A continuación se muestran los subjuegos en forma de árbol:



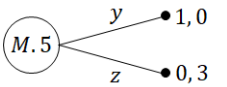
(a) Subjuego a partir de $M.2$



(b) Subjuego a partir de $M.3$



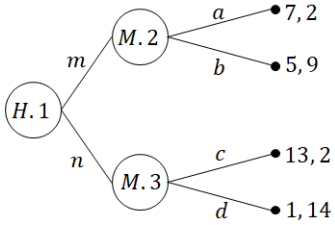
(c) Subjuego a partir de $M.4$



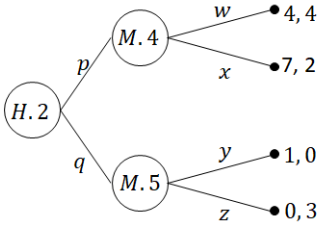
(d) Subjuego a partir de $M.3$

En cada subjuego individualmente considerado, la mujer M tiene opciones distintas, ya que lo que pueda hacer depende de lo que se haya hecho anteriormente (no puedes subirte al Superman si fueron a la Feria de Chapultepec). Estas dos accione posibles en cada subjuego corresponden con estrategias del subjuego, puesto que el plan completo de acción sólo considera un período (el final). Para el subjuego a partir de $M.2$ tiene las acciones a y b. Notemos que en este caso la mujer no tiene que reaccionar al hombre eligiendo la estrategia n porque **en este período (período 3)** asumimos la trayectoria como dada (regresaremos a esta idea cuando planteemos las estrategias del primer período). En el subjuego a partir de $M.3$, las estrategias c y d, y así sucesivamente.

Ahora veamos los dos subjuegos con nodo de decisión en el segundo período:



(a) Subjuego a partir de $H.1$



(b) Subjuego a partir de $H.2$

En los dos subjuegos mostrados anteriormente hay dos períodos, el período 2 y el período 3 del juego completo. En este sentido, el juego se asemeja al descrito anteriormente. Analicemos el subjuego A partir de $H.1$. En el primer período de este subjuego (el período 2 del juego completo dado que en el primer período la mujer jugó A), el hombre tiene dos estrategias: m y n. Por su parte, la mujer tiene cuatro estrategias, ya que tiene que tener un plan completo de acción (su estrategia le tiene que decir qué hacer en cada posible nodo/subjuego en que se encuentre). Al igual que en el juego mostrado en las secciones anteriores (batalla de los sexos en dinámico), encontramos las estrategias de la mujer:

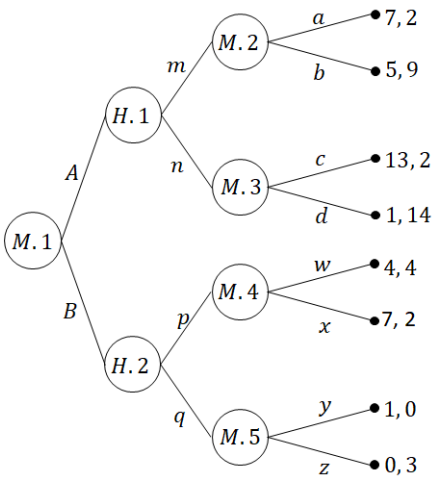
$$\left[\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]$$

La interpretación es la misma que anteriormente. La primera estrategia nos dice que, en caso de que el hombre decida jugar m, la respuesta sería a, pero en caso de que el hombre juegue n, la respuesta sería c. La segunda estraegia nos dice que en caso de que el hombre decida jugar m, la respuesta sería a, pero en caso de que el hombre juegue n, la respuesta sería d. Podemos hacer esto para el resto de las estrategias, y notemos que cada estrategia es distinta, ya que tiene una combinación de respuestas por nodo distintas.

Se deja al lector encontrar las estrategias del segundo subjuego a partir del nodo $H.2$.

Pasemos al último subjuego, o sea, el juego entero. Lo volvemos a mostrar abajo:

Subjuego Juego entero



En este caso, notemos que el hombre juega sólo en el segundo período, respondiendo a dos posibles estrategias de la mujer (A o B) con dos estrategias posibles en cada escenario (m o n en caso de A, y p o q en caso de B). En este sentido, las estrategias del hombre se asimilan al jugador en el segundo período de los juegos anteriores. Así, sus estrategias están dadas por:

$$\left[\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n \\ q \end{pmatrix} \right]$$

Notemos en este sentido, que el individuo 2 sólo reacciona a las estrategias anteriores de la mujer, y no vuelve a reaccionar porque su participación en el juego se agota en dicho período. No obstante, para la mujer esto no sucede así, ya que después del primer período, ella vuelve a participar en el juego en el tercer período. Aquí es importante remarcar de nuevo las estrategias como un plan completo de acción. Si bien en los cuatro subjuegos que se llevan a cabo a partir del último período se asume una trayectoria como dada, en el juego entero la mujer no asume dicha trayectoria en los últimos períodos. Es decir, la mujer tiene que considerar para el último período cualquier posible nodo de decisión en dicho período. De aquí que sea la estrategia un plan completo de acción.

Un ejemplo de estrategia ayudará a aclarar las ideas anteriores.

En primer lugar, ya hemos notado que la mujer juega en 2 períodos distintos, el primero y el tercero. En este sentido, su estrategia tiene que decirle qué hacer en cada uno de los períodos. En el primer período sólo hay un nodo de decisión, por lo cual la mujer no tiene que preveer varios escenarios. Así, sus posibilidades para el primer período son A o B. Pero en el tercer período, hay 4 posibles escenarios que la mujer tiene que considerar, a saber, que la trayectoria pasada sea $A-m$, $A-n$, $B-p$ o $B-q$. Una estrategia, en este sentido, sería:

$$\begin{pmatrix} & a \\ A; & c \\ & w \\ & y \end{pmatrix}$$

En la notación anterior, el punto y coma ; separa los períodos, mientras que verticalmente las estrategias para cada uno de los nodos del período tres. Esta notación es más utilizada, pero cualquier otra notación que refleje el plan completo de acción también es válida. En total existen 32 estrategias posibles para la

mujer en el juego entero: 16 formas de combinar las acciones del último período ($2 \times 2 \times 2 \times 2$), por dos acciones posibles en el primer período.

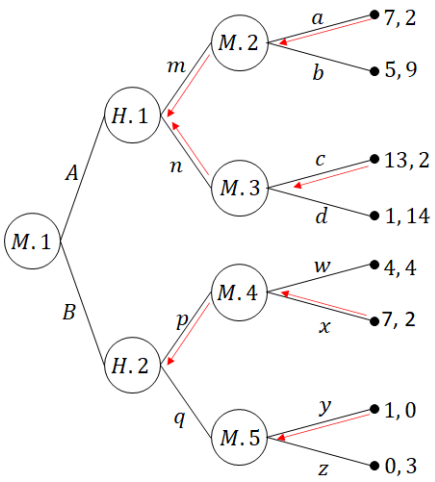
Si consideramos adicionalmente que el hombre cuenta con 4 estrategias, la forma matricial del juego sería demasiado grande para ejemplificarla en una cuartilla. No obstante, podemos encontrar fácilmente el equilibrio perfecto en los subjuegos utilizando inducción hacia atrás, tal como lo habíamos realizado anteriormente.

Recordemos que en cada período tenemos que ver el pago que más le conviene al jugador que juega en cada período. En este sentido, en el último período nos importa el pago de la mujer, que es el primer número entre paréntesis, en el segundo período nos importa el pago del hombre, el segundo entre paréntesis, y en el primer período nos vuelve a interesar el pago de la mujer.

En el último subjuego la mujer preferirá a, c, x, y sin ambigüedad, por lo que el ENPS deberá reflejar estas acciones de la mujer para sus nodos de decisión $M.2, M.3, M.4, M.5$, respectivamente. No obstante, para el hombre, cuando está en $H.1$, ya sea que elija m o elija n, la mujer terminará eligiendo algo que ultimadamente le dará al hombre 2 de utilidad, por lo que tanto m como n dentro de $H.1$ pueden formar parte de un ENPS. Esto nos generará, ex ante, al menos dos ENPS. Para $H.2$, donde la mujer elegirá x o y como respuesta a p o h, el hombre tiene que decidir entonces si prefiere el pago de 2 o el pago de 0. Ultimadamente prefiere el pago de 2, por lo que en $H.2$ el hombre sólo elegirá p en cualquier ENPS.

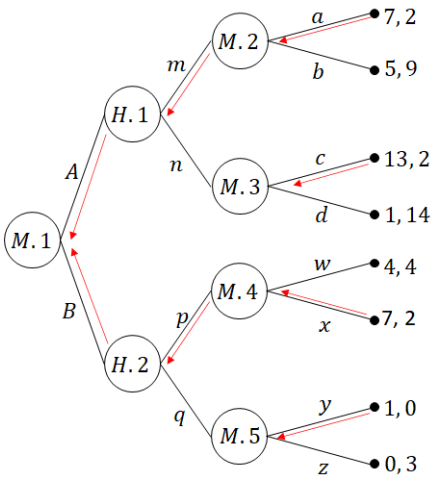
los senderos hasta ahora se ven de la siguiente manera:

Sendero del Equilibrio Perfecto en Subjuegos



Supongamos que el hombre elgie m en caso de que la mujer elja A, y sabemos que siempre elegirá p si la mujer escoge B. Sólo nos queda decidir si a la mujer le conviene escoger A o B en el primer período. Ilustremos el juego con el supuesto de que el hombre elige m en caso de A:

Sendero del Equilibrio Perfecto en Subjuegos (2)

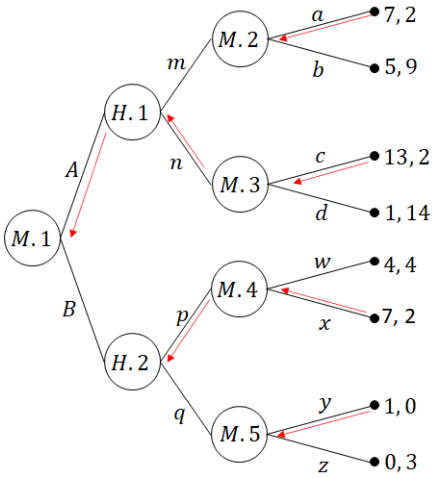


Al igual que en el caso anterior, la mujer ahora está en una indiferencia entre A o B. Cualquiera que sea su elección será un equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos. Así, combinamos la estrategia A junto con el resto de la trayectoria para dar con uno de los equilibrios perfectos en subjuegos, y hacemos lo mismo para B, y obtenemos los 2 ENPS siguientes:

$$\left\{\left(\begin{array}{c} A; \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} a \\ c \\ x \\ y \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} m \\ p \end{array}\right)\right\} \quad , \quad \left\{\left(\begin{array}{c} B; \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} a \\ c \\ x \\ y \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} m \\ p \end{array}\right)\right\}$$

Notemos que, adicional a la elección de sendero en el primer período, la forma de responder en el otro período que juega no ha cambiado. Esto es muestra de que en este período se está manteniendo el equilibrio en dicho sugjuego que permite la multiplicidad de equilibrios en el juego completo.

Sendero del Equilibrio Perfecto en Subjuegos (3)



No hemos olvidado que para los dos equilibrios perfectos en subjuegos anteriores supusimos que ante A, el hombre jugaría m. Ahora supondremos que juega n. En su forma extendida, la trayectoria estaría dada

por la gráfica anterior. En este caso, a la mujer le convendría jugar A, ya que el sendero de equilibrio la llevaría a un pago de 13 en lugar de a un pago de 7. Entonces tenemos un tercer equilibrio de Nash perfecto en subjuegos dado por:

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} & a \\ A; & c \\ & x \\ & y \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) \right\}$$

En total, entonces, tuvimos tres equilibrios de Nash perfectos en los subjuegos, en estrategias puras. La posibilidad de que los individuos estén indiferentes entre elegir dos trayectorias distintas ya que sus pagos serían los mismos tiene como resultado un continuo de estrategias mixtas en los cuales los individuos asignan probabilidades positivas entre 0 y 1 a los senderos que los dejan indiferentes. No es objeto de la presente nota ahondar en estos equilibrios.

Antes de pasar al siguiente apartado, recordemos un poco sobre lo que habíamos mencionado anteriormente de los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos. Como habíamos mencionado anteriormente, en los juegos dinámicos pueden existir muchos equilibrios de Nash, pero sólo unos pocos iban a ser perfectos en los subjuegos. Es decir, que sólo algunos de esos equilibrios de nash en el juego entero iban a satisfacer la definición de equilibrios de Nash en cada uno de los subjuegos.

Esto tiene un poco de relación con la forma en que se definen las estrategias. En el ejemplo anterior, la estrategia de la mujer para responder en el último período, incluía responder a un escenario en el que se haya escogido B en el primer período, lo cual pareciera absurdo si de hecho eligió A desde el inicio. ¿Pero cómo podría ser un equilibrio en todos los subjuegos una estrategia que no prevé qué hacer en cada subjuego? Aquí se ilustra por qué es necesario prever cada sendero pasado en cada nodo de información.

El hecho de que los equilibrios perfectos en subjuegos sean equilibrios en cada subjuego, implica automáticamente que es un equilibrio en el subjuego dado por el juego entero. Esto es lo que permite la inducción hacia atrás como medio de encontrar el equilibrio perfecto en subjuegos. De esta manera eliminamos las amenazas no creíbles. Como habíamos mencionado anteriormente, las amenazas son no creíbles cuando, llegando a determinado nodo de decisión, seguir con la amenaza resulta más perjuidical para el agente, por lo que no estaría implido a cumplir con su amenaza en dicho período. Como en el subjuego a partir de dicho nodo la elección ya no es un equilibrio de Nash, entonces las amenazas no creíbles no pueden ser parte de equilibrios perfectos en subjuegos.

4.3 Aplicación a competencia: Stackelberg y precios límites

4.3.1 Modelo de Stackelberg

Vamos a describir una economía en la que en un primer período $t = 1$ existe un *incumbent* que produce un bien q_m, y que presenta una estructura de costos tal que $C_m(q_m) = cq_m$. En un segundo período una empresa entrante observa la cantidad producida por la primera empresa, y con base en eso produce una cantidad q_e del mismo bien para maximizar sus beneficios. Este modelo, básicamente, introduce un componente dinámico a la competencia de Cournot.

Asumimos que el *incumbent* $C_m(q_m) = cq_m$ (mismo costo marginal). Una vez que ambas empresas deciden sus cantidades, se intercambian en el mercado todas estas cantidades, y el precio estará fijado por la función de demanda inversa $P = a - Q$ en donde $Q = q_m + q_e$. Hay información perfecta, por lo que cada empresa conoce su estructura de costos y los de la otra empresa. Asimismo, conocen de manera segura el devenir de sus acciones.

En el modelo de Cournot, el supuesto era que, si un agente incrementa su cantidad, esto no afecta las decisiones de producción de las demás empresas. El modelo de Stackelberg, refleja una estructura en la que el líder sabe que su nivel de producción alterará las decisiones de producción de su competidor, pero no a la inversa.

Pasamos a resolver el problema por inducción hacia atrás, comenzando entonces con el problema de maximización del entrante e.

$$\max_{q_e} q_e * (a - q_m - q_e) - cq_e$$

CPO:

$$\begin{aligned} & a - q_m - 2q_e - c = 0 \\ \implies \quad & q_e = \frac{a - c - q_m}{2} \end{aligned}$$

Esta ecuación que obtenemos aquí es la función de mejor respuesta de la empresa entrante. Notemos que esta mejor respuesta es una estrategia en un modelo dinámico en el sentido de que representa un **plan completo de acción**, ya que dice qué hacer para cada una de las posibles acciones de la empresa incumbente.

Ahora que la empresa incumbente sabe cómo va a responder la empresa entrante, va a usar esto para su ventaja. ¿Cómo? Introduciéndolo dentro de su función de beneficios para maximizar. De esta forma, el problema de la empresa incumbente está dado por:

$$\begin{aligned} & \max_{q_m} q_m * (a - q_m - q_e(q_m)) - cq_m \\ & \max_{q_m} q_m * (a - q_m - \frac{a - c - q_m}{2}) - cq_m \\ & \max_{q_m} q_m \left(\frac{a - q_m - c}{2} \right) \end{aligned}$$

CPO:

$$\begin{aligned} & \frac{a - c}{2} - q_m = 0 \\ \implies \quad & q_m = \frac{a - c}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora ya tenemos el equilibrio de Nash que es perfecto en los subjuegos, y que está dado por:

$$\left(\frac{a - c}{2}, \frac{a - c - q_m}{2} \right)$$

El hecho de que la estrategia de la empresa entrante dependa de la cantidad producida por el monopolio quiere decir que el entrante responde a cada acción del *incumbent*. En este sentido, esta estrategia es un plan completo de acción.

Notemos que la estrategia de la empresa entrante, si sustitumimos la de la empresa incumbente, sería: $\frac{a-c}{4}$. Entonces, el sendero de equilibrio (**no es equilibrio de Nash**) está dado por:

$$\left(\frac{a - c}{2}, \frac{a - c}{4} \right)$$

Esto se debe a que el perfil de estrategias anterior, si bien representa un equilibrio de Nash, no representa uno perfecto en los subjuegos ya que el jugador entrante no está contemplando un plan completo de acción de mejor respuesta dada la estrategia de la *incumbent*. Es importante recordar que en un equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos es necesario incluir el plan completo de acción como la estrategia.

Para finalizar esta parte, veamos a cuánto ascienden los beneficios. En primer lugar, notemos que la producción en equilibrio será:

$$\frac{3}{4}(a - c)$$

Por lo que el precio de equilibrio sería:

$$P = \frac{a + 3c}{4}$$

Entonces tenemos que los beneficios de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \pi_m = & \left(\frac{a-c}{4}\right)\left(\frac{a-c}{2}\right) \\ \pi_e = & \left(\frac{a-c}{4}\right)^2 \\ \text{Donde} \quad \pi_m > & \ \pi_e \end{aligned}$$

En este ejemplo se ve cómo la empresa entrante, al elegir después, y dado que la incumbente conoce su estructura de costos, cae en una desventaja y sus beneficios son menores a los de la empresa incumbente.

Sólo como anotación, se puede demostrar que para este juego, el equilibrio de Cournot también es un equilibrio de Nash, aunque no perfecto en los subjuegos (amenaza no creíble). Veremos a continuación cómo construir una amenaza no creíble para el modelo de Stackelberg.

4.3.2 Construcción de equilibrios de Nash a partir de amenazas no creíbles

Esta sección es una adición al modelo de Stackelberg para ayudarnos a encontrar equilibrios a partir de amenazas no creíbles. Supongamos que los costos c son iguales a 0. De la sección anterior, entonces, el qeuilibrio perfecto en subjuegos está dado por:

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{a-q_m}{2}\right)$$

Tomemos brevemente la estrategia del entrante. Como sabemos, su estrategia siempre tiene que ser una mejor respuesta. Como es el agente que juega en el segundo período, éste tiene que tener la amenaza no creíble. Propongamos algúna cantidad cualquiera para el *incumbent*, exceptuando aquella del equilibrio perfecto en subjuegos. Para el caso, supondremos una cantidad del *incumbent*:

$$\hat{q}_m = \frac{a}{4}$$

De ser este el caso, la cantidad óptima de la empresa enetrante, obtenida a partir de su función de mejor respuesta, sería:

$$\hat{q}_e = \frac{3a}{8}$$

Ahora bien, esto no basta para encontrar el equilibrio de Nash. Tenemos que construir una amenaza no creíble. Hay varias maneras de hacerlo, pero nos vamos a centrar en una sencilla. Definitivamente la cantidad anterior no es óptima para el monopolio en el primer período. Entonces el entrante tiene que lograr que el monopolio no tenga incentivos a desviarse. Esto lo hace mediante una amenaza. Obtengamos primero el precio de equilibrio.

$$P = \frac{3a}{8}$$

Por lo tanto, los beneficios del *incumbent* serían de:

$$\hat{\pi}_m = \frac{3a^2}{32} > 0$$

Mientras tanto, los beneficios del entrante serían:

$$\hat{\pi}_e = \frac{9a^2}{64} > 0$$

Como notamos, los beneficios de ambas empresas, particularmente del *incumbent*, son positivos. Aquí es donde construimos la amenaza. La empresa entrante amenaza al *incumbent* con que, si decide producir otra

cantidad, el entrante va a sobreproducir de tal manera que impulse el precio a la baja, de tal manera que el monopolio vea sus beneficios disminuidos. Para simplificar, diremos que el entrante impulsará el precio a 0 en caso de que el monopolio se desvíe, haciendo que los beneficios del monopolio sean iguales a 0. Así, la estrategia del entrante estará dada por:

$$\hat{q}_e = \begin{cases} \frac{3a}{8} & si \quad \hat{q}_m = \frac{a}{4} \\ a & si \quad \hat{q}_m \neq \frac{a}{4} \end{cases}$$

Notemos que, dado que el monopolio produce $a/4$ unidades, el entrante produce su mejor respuesta, por lo que no tiene incentivos a desviarse. Mientras tanto, el incumbente produce una cantidad distinta a la del equilibrio perfecto en subjuegos y obtiene beneficios mayores a 0. No obstante, si se desvía, el entrante responde de tal manera que el precio se baja a 0, lo que haría que los beneficios del monopolio se fueran a 0. Por lo tanto, el monopolio tampoco tiene incentivos a desviarse. En este sentido, la estrategia descrita anteriormente de ambos jugadores es un equilibrio de Nash.

No obstante, como nos imaginaremos, no es perfecto en los subjuetos. Esto, porque si el monopolio se desvía, el entrante no estaría respondiendo con su mejor respuesta, por lo que en ese período no sería un equilibrio de Nash. Entonces, la estrategia del entrante descrita anteriormente constituye una amenaza no creíble.

4.3.3 Precios límite

Una observación que ocurre cuando se modela un monopolio frente a un entrante, es si el monopolio puede anticiparse a una potencial entrada, y disminuir su precio de tal manera que al entrante no le convenga entrar. Esto se da en presencia de costos fijos. El modelo se ha usado para defender que los monopolistas enfrentan competencia de potenciales entrantes, entonces disminuirán su precio respecto del de monopolio, aunque a su vez se ha usado para argumentar que, incluso con potencial entrada, las empresas fijarán precios por encima de costo marginal (no competitivos). Esta última interpretación también se conoce como disuación a la entrada.

Supongamos que existen costos de entrada al mercado, denotados por F. Asumiremos que el *incumbent* es un monopolio bien establecido en el mercado por la que no debe de pagar estos costos fijos. Quien los debe de pagar es la empresa entrante si y sólo si decide entrar y producir determinada cantidad. Por simplicidad vamos a asumir que los costos variables de las empresas son iguales a 0 para ambos casos. Entonces, tenemos que los nuevos beneficios de la empresa entrante, que dependen de cantidad producida por el monopolio serían:

$$\pi_e = \begin{cases} \frac{1}{4}(a - q_m)^2 - F & \text{si} \quad q_e > 0 \\ 0 & \text{si} \quad q_e = 0 \end{cases}$$

Lo que queremos hacer aquí es encontrar los valores de F para los cuáles la empresa entrante decide no producir. Adicionalmente, nos interesa encontrar los valores de F bajo los cuales la empresa entrante podría decidir producir, pero la incumbente puede disuadir a la entrante a producir, incrementando su producción y por tando reduciendo el precio. Finalmente, es de interés encontrar los valores de F para los cuáles la empresa entrante decide producir, y que son tan bajos, que a la empresa incumbente no le conviene intentar disuadirla. Empecemos por la primera.

En el primer caso tenemos que la empresa entrante no va a producir debido a que los costos de producción son demasiado elevados, y el monopolio no necesita actuar para disuadirla a la entrada. Entonces, la cantidad que producirá el monopolio será igual a la cantidad del equilibrio de Stackelberg e igual a la del equilibrio monopólico:

$$q_m = \frac{a}{2}$$

Sabemos entonces que la empresa entrante, al ser racional, no producirá si los beneficios de producir son menores o iguales a los beneficios de no producir (0). Esto es, no producirá si:

$$\begin{aligned} 14(a-q_m)^2 - F \leq & \quad 0 \\ F \geq & \quad \frac{a^2}{16} \end{aligned}$$

Ahora vamos a encontrar los valores de F bajo los cuáles a la empresa monopólica **NO** le conviene disuadir a la entrante. Es decir, el tercer caso. Por lógica, el segundo caso serán los valores restantes de F.

El monopolio puede disuadir a la entrada a la empresa entrante si logra, mediante su producción q_m, que los beneficios de la entrante sean iguales a cero. No le conviene seguir produciendo más, ya que habrá logrado disuadir a la entrante, y si produce más, bajará el precio y empeorarán sus beneficios. Entonces, la empresa incumbente decidirá su producción q_m tal que los beneficios de la entrante sean 0:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(a-q_m)^2 - F = 0 \\ \implies & \frac{1}{2}(a-q_m) = \sqrt{F} \\ \implies & q_m = a - 2\sqrt{F} \end{aligned}$$

Si el monopolio produce esta cantidad, la empresa entrante no producirá nada, por lo cuál el precio de equilibrio sería:

$$P = 2\sqrt{F}$$

Y por lo tanto, los beneficios de disuadir de la empresa monopólica serían:

$$\pi_m^{Dis} = 2\sqrt{F}(a - 2\sqrt{F})$$

Ahora bien, sabemos que si el monopolio no disuade la entrada, del equilibrio de Stackelberg sabemos que sus beneficios serían:

$$\pi_m^{NoDis} = \frac{a}{8}$$

Como nos encontramos con una empresa racional que busca maximizar sus beneficios, ésta no querrá disuadir a la entrada a la empresa entrante si sus beneficios de no disuadirla son mayores a sus beneficios de disuadirla. Esto es:

$$\begin{aligned} \pi_m^{NoDis} > & \quad \pi_m^{Dis} \\ \frac{a}{8} > & \quad 2\sqrt{F}(a - 2\sqrt{F}) \end{aligned}$$

Realizando un poco de algebra:

$$4F - 2a\sqrt{F} + \frac{a}{8} > 0$$

$$\implies \qquad \sqrt{F} < \frac{a - \sqrt{a^2 - \frac{a}{2}}}{4}, \qquad \sqrt{F} > \frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{a}{2}}}{4}$$

Posteriormente el álgebra se vuelve complicada. Sólo para llegar a un resultado simple, supondremos que $a = 1$. Posteriormente adaptaremos nuestros resultados anteriores. Entonces, de la ecuación anterior tenemos que el monopolio no disuadirá a la entrante si:

$$\implies \qquad \sqrt{F} < \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{4}, \qquad \sqrt{F} > \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{4}$$

Notamos que el segundo caso no es de interes, puesto que los costos fijos son más elevados de lo necesario para que la empresa incumbente no neccesite siquiera empezar a disuadir a la entrante. Nos quedaremos con el primer caso. Para despejar F:

$$\begin{aligned} & \sqrt{F} < \frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{4} * \frac{2}{2} \\ \implies & \sqrt{F} < \frac{2-\sqrt{2}}{8} \\ \implies & F < \left(\frac{2-\sqrt{2}}{8}\right)^2 \end{aligned}$$

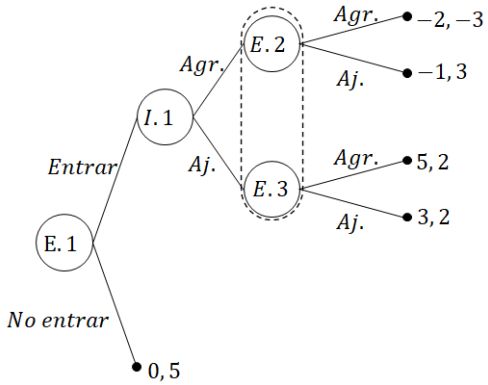
Estos valores de F son aquellos en los que la empresa incumbente decidirá no disuadir. Sólo para resumir nuestros resultados (incluyendo el que $a = 1$, tenemos que para:

$$\begin{array}{rl} F \geq \dfrac{1}{16} & \text{La entrante no producirá} \\ \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{8}\right)^2 \leq F < \dfrac{1}{16} & \text{La incumbente disuadirá a la entrante} \\ F < \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{8}\right)^2 & \text{Ambas empresas producirán} \end{array}$$

4.4 Juegos de información imperfecta

En los juegos dinámicos anteriores habíamos supuesto que había información perfecta (además de información cierta, completa y simétrica). Ahora supondremos que hay información imperfecta: al menos un agente tiene al menos un conjunto de información que no es unitario.

Vamos a describir un pequeño juego de entrada. En el primer período, una empresa entrante E decide entre si entrar al mercado o no entrar. Si decide no entrar, se termina el juego. La empresa establecida, llamémosle *incumbent*, I, observa si hubo entrada o no (digamos, puede ver que hay una tienda nueva), y entonces decide si competir agresivamente o ajustarse. El entrante elige después si competir agresivamente o ajustarse, pero sin poder observar la estrategia del *incumbent* (no nos preocupemos ahorita por las razones). El juego se ve de la siguiente manera, en donde los pagos tras los nodos terminales reflejan, en primer lugar, el pago del entrante, y en segundo lugar el del *incumbent*:



Así, los conjuntos de información con los que cuenta el entrante son. $\{\{E.1\}, \{E.2, E.3\}\}$ (notamos cómo $E.2$ y $E.3$ están dentro de los mismos corchetes, que indica que son parte del mismo conjunto de información). Como habíamos mencionado anteriormente, cuando un conjunto de información no es unitario, entonces todas las acciones en los nodos que forman parte del mismo conjunto de información tienen que ser las mismas, pues cualquier diferencia en las acciones posibles permitiría al agente saber que está en un nodo distinto.

Dado que tenemos esta "nube" que impide conocer el nodo exacto en el que está el entrante, el segundo ($I.1$) y tercer período ($E.2$, $E.3$) se modelan como si fueran simultáneos.

El entrante puede elegir acción en dos conjuntos de información, por lo que su estrategia deberá incluir las acciones en cada conjunto de información. Estas están dadas por: {(Entrar, Agr.), (Entrar, Aj.), (No Entrar, Agr.), (No Entrar, Aj.)}. Por su parte, el *incumbent* sólo tiene un conjunto de información donde elegir, $\{I.1\}$, por lo que sus estrategias son: {Agr., Aj.}.

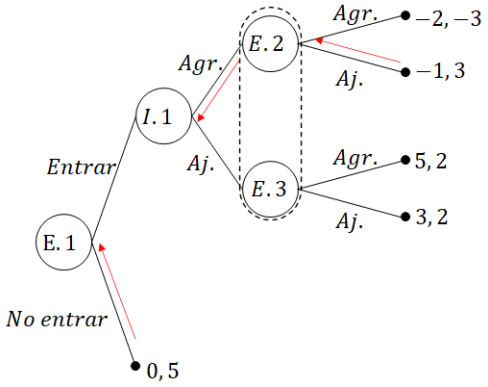
Podemos colocar todas estrategias en forma matricial y encontrar los equilibrios de Nash. De manera rápida:

		Entrante	
		Agr.	Aj.
Incumbent	Entrar, Agr.	-2, -3	**5**, **2**
	Entrar, Aj.	-1, **3**	3, 2
	No Entrar, Aj.	**0**, **5**	0, **5**
	No Entrar, Aj.	**0**, **5**	0, **5**

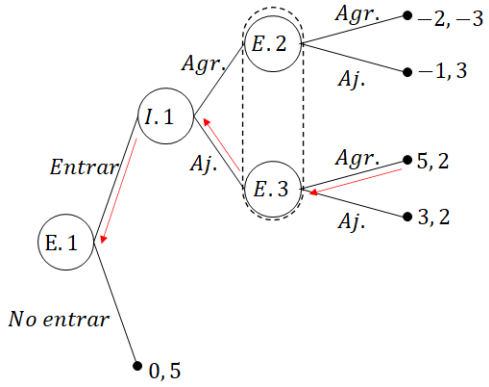
Como se muestra en la matriz anterior, existen tres equilibrios de Nash. No obstante, no todos estos son perfectos en subjuegos. Para encontrar estos, lo podemos hacer por inducción hacia atrás. Entonces vayamos al último subjuego; como no es posible saber qué eligió el *incumbent*, este último período se puede modelar como si fuera de elección simultánea a partir de $I.1$ (recordemos un subjuego parte sólo de conjuntos de información unitarios, por lo que no se puede partir de $E.2$ o $E.3$ porque ninguno es un conjunto de información unitario). El juego se ve de la siguiente manera (incumbente en columnas):

	Agr.	Aj.
Agr.	-2, -3	<u>5</u>, <u>2</u>
Aj.	<u>-1</u>, <u>3</u>	3, 2

En el subjuego a partir de $I.1$ hay entonces dos equilibrios de Nash. Entonces habrá que dibujar dos senderos, uno para cada EN en el segundo período:



(a) Sendero si EN en $I.1$ es (Agr., Aj.)



(b) Sendero si EN en $I.1$ es (Aj., Agr.)

Como notamos, en el primer escenario, si el equilibrio de Nash en el segundo período es que el *incumbent* sea agresivo y el entrante se ajuste, al entrante le conviene no entrar desde un inicio. Las estrategias de este equilibrio perfecto en subjuetos tiene que ilustrar eso. Así, este ENPS lo escribimos como $\{(NoEntrar, Aj.), (Agr.)\}$. En cambio, si en el segundo período el equilibrio de Nash es que el *incumbent* se ajusta y el entrante es agresivo, al entrante le conviene sí entrar al inicio. El ENPS lo escribimos, en este caso, como $\{(Entrar, Agr.), (Aj.)\}$.

Si bien pareciera que al competidor le conviene entrar de manera agresiva, no sabe si el incumbente será agresivo también. Si el incumbente es agresivo también, entonces le conviene no entrar desde un inicio.

A diferencia de otros juegos, la importancia en este radica precisamente en que el competidor no tiene suficiente información en el tercer período como para saber qué hacer. Por lo tanto, ya que ambas perfiles son equilibrios de Nash en el subjuego dado que C decide competir, las estrategias del incumbente sí son una amenaza creíble.

¿Entonces, a cuál equilibrio de Nash perfecto en subjuegos se llegará? Al igual que en juegos estáticos, la respuesta es insatisfactoria, y es un: no sabemos. No obstante, hay salidas a lo anterior. Los agentes pueden mandar señales al mercado para indicar cómo van a competir. Por ejemplo, si el antes de la decisión de entrada (antes de $E.1$), el *incumbent* hace una inversión que le permite disminuir sus costos, puede alterar los pagos tras los nodos terminales, y mandar una señal de que está listo para competir agresivamente.

Se deja al lector modificar el juego anterior para incluir una decisión previa del *incumbent* para invertir, y ver cómo se alteran los pagos que permitan mandar una señal clara. Lo anterior, en el entendido de que el juego sigue siendo de información completa y cierta.

4.5 Juegos repetidos

Por último, modelaremos qué ocurre con los juegos estáticos cuando estos se repiten en el tiempo. Una característica de estos juegos, que los hace ligeramente diferentes de los dinámicos (aunque pueden ser modelados de maneras similares), es que en cada período, los individuos reciben un pago. En cada período, los pagos por los mismos perfiles de estrategias estáticas son los mismos.[10] Los juegos repetidos tienen una función primordial al momento de modelar el cumplimiento de contratos de los agentes en el tiempo.

De manera burda, supongamos que tenemos un dilema del prisionero, en donde uno de los jugadores es la U.R.S.S. y el otro jugador es Estados Unidos. Las estrategias son dos: atacar o no atacar. En ambos casos, el modelo será tal que el atacar sea estrategia dominante. Esto tiene sentido, ¿no? Es decir, si la U.R.S.S. no va a atacar, a Estados Unidos le conviene atacar y terminar la guerra fría. Si la U.R.S.S. decide atacar, a Estados Unidos le conviene atacar y defender su postura. Lo mismo ocurre con la U.R.S.S. cuando toma como dada la estrategia de Estados Unidos: siempre le conviene atacar. Es decir, el juego es estático, y el mundo se va a terminar al día siguiente. No obstante, ambos estarían mejor no atacando.

Pero el mundo no termina en un día, y ciertas interacciones, como el dilema del prisionero, se juegan en repetidas ocasiones. Por eso no conviene atacar siempre en el dilema del prisionero planteado anteriormente. Dado que Estados Unidos y la Unión Soviética viven varios períodos, la utilidad que pueden percibir en el futuro afecta sus pagos totales. No únicamente los pagos del período inmediato.

En los juegos repetidos, consideramos dos tipos: juegos finitos y juegos infinitos. Como su nombre lo indica, los juegos finitos se juegan un número finito de veces, y podemos resolver los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos yéndonos al último período y retrocediendo. Lamentablemente, como en el último período en el dilema del prisionero ambos países atacarán, los agentes se anticiparán y atacarán antes. Por inducción hacia atrás, en el ENPS, los agentes atacarán desde el primer período.

La alternativa serán los juegos infinitos, en donde posteriormente veremos cómo el dilema del prisionero tiene un equilibrio de Nash en donde las partes mantienen la paz.

4.5.1 Juegos Finitos

Uno de los problemas del dilema del prisionero es que, bajo un horizonte finito, como sólo hay un equilibrio de Nash en el juego estático, éste se jugará siempre. Una alternativa son los juegos que cuentan con más de un equilibrio de Nash, uno con pagos altos y uno con pagos bajos. Así, las partes pueden pactar jugar estrategias distintas y recompensar en el último período con las estrategias del equilibrio alto, pero amenazar con cambiar al equilibrio bajo en caso de traición. Aquí el juego sigue siendo no cooperativo, pues la posibilidad de hacer valer el pacto por una autoridad externa no existe.

Nos enfocaremos en los juegos que, en su visión estática, tienen dos equilibrios de Nash (uno con pagos altos para ambos, y otro con pagos más bajos para ambos), y un óptimo de Pareto en el cual los pagos de

[10] No obstante, como son períodos distintos, los pagos pueden estar afectos a una tasa de descuento δ. Esta tasa de descuento se multiplicará por si misma de manera exponencial en cada período postorior, de tal manera que los pagos del juego en el período t están multiplicados por δ^{t-1}. Para el presente curso no nos ocuparemos de una tasa de descuento.

ambos agentes superan a los pagos del equilibrio de Nash con pagos altos. Dada la definición de equilibrio perfecto en subjuegos, al hacer dinámico este juego (hacerlo repetido), en el último período se jugará un equilibrio de Nash, cualquiera de los dos posibles anteriores, de ahí la recompensa o castigo.

Pasemos entonces al siguiente juego:

	A	B	C
A	$\underline{1}$, $\underline{1}$	2, 0	2, 0
B	0, 2	5, 5	0, $\underline{7}$
C	0, 2	$\underline{7}$, 0	$\underline{4}$, $\underline{4}$

En la matriz anterior podemos encontrar rápidamente los equilibrios de Nash en caso de que este juego dure un único período. Notamos que los equilibrios de Nash son $\{A, A\}$ y $\{C, C\}$. Asimismo, notamos que ninguno de estos es un óptimo de Pareto, ya que ambos son dominados en sentido Pareto por el perfil de estrategias $\{B, B\}$ que mejora la situación de ambos jugadores.

Hasta ahora, el juego no presenta ninguna complicación. No obstante, ¿qué ocurriría si el juego se juega en dos períodos? Para el siguiente ejemplo supondremos que no existe ningún factor de descuento, por lo que la utilidad total de los individuos es igual a la suma de los pagos obtenidos en el período 1 y en el período 2. Es decir, Si el perfil de estrategias que se juega en el primer período es $\{A, A\}$, y el perfil que se juega en el segundo período es $\{C, C\}$, los pagos del cada individuo serían iguales a:

$$u^1 = u_1^1 + u_2^1 = 1 + 4 = 5$$

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1 + 4 = 5$$

En la notación anterior, el supraíndice denota al jugador, y el subíndice denota el período en el que se encuentra.

Ahora bien, este juego tiene múltiples equilibrios de Nash perfectos en los subjuegos. Por poner un ejemplo, en un equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos, ambos jugadores juegan la estrategia A, sin importar qué haya hecho el otro jugador en el período anterior[11]. Describiremos brevemente por qué esto es un equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos.

Por inducción hacia atrás, notemos que cada subjuego en el último período es igual al juego estático que representa la matriz[12]. Nos basta con resolver los equilibrios en un subjuego para saber cuál es el equilibrio en cada subjuego del segundo período.

En cada subjuego del segundo período existen 2 equilibrios de Nash, dados por $\{A, A\}$ y $\{C, C\}$ [13]. Entonces, queda demostrado que jugar $\{A, A\}$ en el segundo período siempre puede ser parte de un equilibrio perfecto en subjuegos, tal y como lo queremos.

Nos queda demostrar entonces que jugar A en el primer período para ambos jugadores es una estrategia en el primer juego que puede acompañar a la del segundo período en un equilibrio perfecto en subjuetos. Para esto, vayamos directo a los pagos y a la definición de equilibrio de Nash. Fijemos la estrategia del jugador 2 en jugar A en ambos períodos. Vayamos entonces a la estrategia del jugador 1. Si éste decide jugar A en ambos períodos, su utilidad total sería igual a 2. Si decide desviarse y jugar B o C en el primer período, su pago total sería de 1. Asimismo, si decide desviarse en el segundo período, su pago sería de 1. Por lo tanto, el agente 1 no tiene incentivos a desviarse en el juego entero.

[11] Aclaramos que las estrategias en el segundo período no dependen de lo que se haya jugado en el período anterior. Por lo tanto, el plan completo de acción puede incluir jugar A en el segundo período independientemente de que se haya jugado en el período anterior, o lo que es lo mismo, jugar A en el segundo período como respuesta a todas las posibles trayectorias anteriores del juego.

[12] Decimos que cada subjuego, porque en realidad existe un subjuego para cada posible sendero que se haya jugado en el período anterior. En sentido estricto, existen 9 subjuegos iguales en el segundo período, más el juego entero, para un total de 10 subjuegos.

[13] Esta forma es resumida, ya que en realidad la estrategia de cada agente es jugar A como respuesta a cada posible sendero anterior.

Lo mismo ocurre para el jugador 2, fijando la estrategia del individuo 1. Entonces, en el juego entero, ningún jugador tiene incentivos a desviarse. Adicionalmente, en cada subjuego, el perfil anterior es un Equilibrio de Nash, es decir, no existen amenazas no creíbles. Por lo tanto, el que ambos jugadores jueguen A en cada período bajo cualquier circunstancia es un equilibrio de Nash en todos los subjuegos, y por lo tanto, un equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos.

Ahora bien, habíamos dicho que al modelar estas circunstancias nos interesa saber si los individuos cumplirán su pacto para mejorar su situación al inicio. Esto es posible mediante estrategias de premio castigo que corresponden al juego. En el caso en particular, las partes pactarán elegir en el primer período algo que no sería equilibrio de Nash en el juego estático, pero que mejora la situación de ambos respecto a cualquier equilibrio de Nash en el juego estático (un perfil que domine en sentido Pareto a los equilibrios de Nash).

Como sabemos, en el segundo período tiene que jugarse un equilibrio de Nash. La ventaja de este juego, es que existen dos equilibrios de Nash, por lo cual el premio en el segundo período por cumplir el pacto en el primero sería jugar el equilibrio con pagos altos, y el castigo por desviarse sería jugar el equilibrio con pagos bajos. Como ambos son equilibrios de Nash en el segundo período para toda trayectoria anterior, esta estrategia de premio/castigo puede ser parte de un equilibrio perfecto en subjuegos.

¿Por qué un individuo pactaría una cosa y al final se desviaría? Notemos que en el primer período, desviarse unilateralmente le da un pago mayor que cumplir su pacto. Esto podría ser un incentivo a desviarse. No obstante, si el castigo en el segundo período es suficientemente alto, o el premio suficientemente alto, los agentes no querrán desviarse en el primer período. ¿Es el diferencial entre premio y el castigo suficiente para que los agentes no se desvíen. Volvamos a escribir el juego en forma matricial.

	A	B	C
A	1, 1	2, 0	2, 0
B	0, 2	5, 5	0, 7
C	0, 2	7, 0	4, 4

Proponemos la siguiente estrategia (plan completo de acción) y analizaremos si es equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos:

$$\left\{\begin{pmatrix} A; & \{B,B\}, & C \\ & o.c., & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A; & \{B,B\}, & C \\ & o.c., & A \end{pmatrix}\right\}$$

Como en las ocasiones pasadas, en el primer paréntesis está la estrategia del primer individuo, y en el segundo paréntesis, la del segundo individuo. Al interior de cada paréntesis, el punto y coma ; divide períodos de decisión, en este caso, a la izquierda la decisión en el segundo período, y a la derecha, la decisión en el segundo período. Notemos que la decisión en el segundo período es un plan completo de acción, ya que a cada posible escenario anterior responde de alguna manera. En caso de que el sendero en el primero período haya sido $\{B, B\}$, o sea, ambos cumplieron, el premio será jugar la estrategia del equilibrio de Nash con pagos altos. En cualquier otro sendero previo (o.c.=otro caso), con que uno se haya desviado, el castigo es jugar la estrategia del equilibrio de Nash con pagos bajos.[14]

Ahora veamos si este equilibrio es perfecto en los subjuegos. Escribamos las utilidades de los agentes bajo esta estrategia:

$$u^1 = u_1^1 + u_2^1 = 5 + 4 = 9$$

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 = 5 + 4 = 9$$

[14]Cabe destacar que la respuesta es a las estrategias de ambos jugadores. Así, para el primer individuo, éste jugará C en el segundo período si ambos cumplieron en el primero, y jugará A si cualquiera de los dos se desvió. Es decir, 1 castiga al 2 si 2 se desvía, pero 1 también se somete al castigo 2 si 1 es el que se desvía. Esta forma de escribir la estrategia, como plan completo de acción, asegura que en el segundo período sí se jugará un equilibrio de Nash, sin importar el subjuego en el que nos encontremos.

Veamos ahora si alguno tiene incentivos a desviarse. Si alguno se desvía de su estrategia en el segundo período, de ganar 4 en dicho período, ganaría 2 si se desvía a C y ganaría 0 si se desvía a B. Por lo tanto, en el segundo período no hay incentivos a desviarse. Esto ya había quedado claro desde el inicio, ya que en el último subjuego siempre se jugará un equilibrio de Nash.

Ahora veamos si hay incentivos a desviarse desde el primer período. Fijemos la estrategia del individuo 2 y veamos si el individuo 1 tiene incentivos a desviarse. Si este individuo se desvía de su estrategia en el primer período, sería para jugar C en lugar de B, y así recibir un pago de 7 en lugar de 5. En este sentido, su utilidad aumenta. No obstante, como se desvió del pacto en el primer período, en el segundo período, dado que el jugador 2 va a castigar y jugar A (amenaza creíble, ya que es parte de un equilibrio de Nash en el subjuego), al jugador 1 le conviene jugar A. Así, por desviarse, en el segundo período su pago sería de 1 en lugar de 4. Así, la utilidad del primer agente quedaría de la siguiente forma:

$$\hat{u}^1 = \hat{u}_1^1 + \hat{u}_2^1 = 7 + 1 = 8$$

Si comparamos los pagos, resulta que cumplir con lo pactado le conviene más al individuo 1, por lo que no tiene incentivos a desviarse del equilibrio propuesto anteriormente. Lo mismo ocurre para el individuo 2. De esta manera, queda demostrado que existe un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en el que los individuos deciden ponerse de acuerdo para jugar el óptimo de Pareto en el primer período, y que cumplen dicho pacto.

¿Bajo qué escenarios los individuos no querrían cumplir con el pacto? Vamos a modelar dos situaciones, una en la que los agentes son impacientes (hay un factor de descuento) y otra en la que el diferencial entre premio y castigo no compensa el beneficio de desviarse. Pasemos al primer modelo.

Incentivos a incumplir: Factor de descuento

Esta sección será breve. Aquí los individuos serán impacientes. Digamos, ¿qué prefieren, comer pizza hoy o comer pizza dentro de un año?[15] ¿Ir a la playa hoy o ir dentro de 5 años? En períodos suficientemente prolongados, los individuos prefieren el consumo inmediato que el consumo futuro, aunque este consumo futuro sí les genera utilidad[16]. Partiremos del juego anterior y digamos que hay un facto de descuento de $\beta = 0.5$, con lo cual, los pagos recibidos en el segundo período son multiplicados por este factor de descuento.

Así, la utilidad del primer agente si cumple su pacto u_1 y su utilidad si se desvía $\hat{u}_1$ están dadas por:

$$u^1 = u_1^1 + \beta u_2^1 = 5 + (0.5)4 = 7$$

[15] Si ustedes son de esas personas que prefieren no comer pizza o posponerla, probablemente son de aquellas personas que también disfrutan de pegarle a Jesús en cuaresma y han fracasado como seres humanos.

[16] Uno de los factores que inciden en todo momento en la toma de decisiones es el tiempo. Está de más decir que entre dos opciones de consumo en distintos tiempos, los individuos prefieren aquella más próxima. El modelo generalmente utilizado son los de descuento exponencial con un factor de descuento β que se eleva a una potencia mayor con cada período, y que multiplica los pagos que reciben los agentes. Así, la utilidad en el período t está dada por $\beta^{t-1}u(c)$ en donde suponemos que $u(c)$ es constante en el tiempo. No obstante, en la teoría se ha demostrado que existen inconsistencias en este tipo de descuento al tratar experimentos empíricos, ya que la forma de descontar era distinta entre períodos. Por ejemplo, entre tener 100 pesos en 30 días o 110 pesos en 31 días, los agentes pueden preferir 110 pesos en 31 días, no obstante, preferir 100 pesos hoy que 110 pesos mañana, lo cual resulta imposible si se utiliza un descuento exponencial. Ante esto, surgen los modelos de descuento hiperbólico que descuentan más rápidamente los períodos próximos, y lentamente entre períodos muy alejados Estos modelos tienen una mayor consistencia en los datos, tal y como lo demuestran Kirby, Nino, Marakovic, Mayerson, entre otros, en los 90). No obstante, estos modelos no dejan de presentar inconsistencias. Por ejemplo, se ha demostrado que pasado determinado tiempo, los agentes dejan de disminuir su tasa de descuento para períodos muy lejanos. Por su parte, Daniel Read muestra en 2001 que los datos pueden ser explicados con descuento subaditivo, en el cual la tasa conjunta de descuento entre dos momentos equidistantes en el tiempo puede incrementarse si se realizan particiones cada vez más pequeñas entre esos períodos (En otras palbras, la tasa de descuento acumulada entre el 1 de enero y el 31 de diciembre es más grande si se la decisión la tomamos de manera diaria, a que si la decisión la tomamos mes con mes).

Otras anomalías que se descubren en los experimentos tienen que ver con un mayor descuento para las ganancias que para las pérdidas, cantidades pequeñas son descontadas más rápidamente que cantidades grandes, una mayor preferencia sobre mejores en el tiempo que ir empeorando (aunque en valor presente parezcan similares), entre otras inconsistencias.

Quizás lo único que quiero dejar como conclusión de esta nota al pie es que, si bien la mayoría de las tomas de decisiones de los agentes son intertemporales, en economía sabemos poco de cómo modelar el tiempo.

Una disculpa por citar autores de repente, y de repente citar ideas vagas. Todo lo pueden encontrar en el siguiente documento:
Frederick, S. Loewenstein, G. & O'Donoghue, T. *Time Discounting and Time Preference: A Critical Review.* Journal of Economic Literature, Vol. 40, No 2. Junio 2002. Páginas 351-401.

$$\hat{u}^1 = \hat{u}_1^1 + \beta \hat{u}_2^1 = 7 + (0.5)1 = 7.5$$

Notamos que el factor de descuento (la impaciencia) vuelve muy pequeños en valor presente tanto el premio por cumplir como el castigo por desviarse. Así, existen incentivos a desviarse, por lo cual, bajo los supuestos adicionales, no hay un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en el que los agentes cumplan su pacto y jueguen la estrategia que domina en sentido Pareto a los equilibrios de Nash.

Incentivos a incumplir: Castigo insuficiente

Como habrán notado en el juego repetido, lo importante para decidir si cumplir o no es si el beneficio que obtengo por incumplir en el primer período supera al diferencial entre premio y castigo en el segundo período. Vamos a replantear el juego anterior de la siguiente manera:

	A	B	C
A	1, 1	2, 0	2, 0
B	0, 2	5, 5	0, 10
C	0, 2	10, 0	4, 4

En el caso anterior, aumentamos los beneficios de desviarse, de tal manera que la utilidad del primer agente si cumple su pacto u_1 y su utilidad si se desvía $\hat{u}_1$ están dadas por:

$$u^1 = u_1^1 + u_2^1 = 5 + 4 = 9$$

$$\hat{u}^1 = \hat{u}_1^1 + \hat{u}_2^1 = 10 + 1 = 11$$

Si los individuos pactan jugar B en el primer período, existen incentivos a desviarse por el incremento en el beneficio por hacerlo. Entonces, no hay un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en el que los agentes cumplan su pacto y jueguen la estrategia que domina en sentido Pareto a los equilibrios de Nash.

Como lo habíamos mencionado, otra manera de hacer esto es disminuir el perjuicio, tomado como el diferencial entre el premio y el castigo. Aquí alteraremos los dos equilibrios de Nash para quedar de la siguiente manera:

	A	B	C
A	2, 2	2, 0	2, 0
B	0, 2	5, 5	0, 7
C	0, 2	7, 0	3, 3

Así, la utilidad del primer agente si cumple su pacto u_1 y su utilidad si se desvía $\hat{u}_1$ están dadas por:

$$u^1 = u_1^1 + u_2^1 = 5 + 3 = 8$$

$$\hat{u}^1 = \hat{u}_1^1 + \hat{u}_2^1 = 7 + 2 = 9$$

En el caso anterior, en lugar de incrementar el beneficio de desviarse en el primer período, reducimos el diferencial entre premio/castigo en el segundo. Como se ve, esto ocasiona incentivos a desviarse del pacto. En este caso, tampoco existe un equilibrio de nash perfecto en los subjuegos en el que los jugadores cumplan un pacto de jugar $\{B, B\}$ en el primer período.

4.5.2 Juegos Infinitos

En En los juegos finitos mostrados en la sección anterior, la amenaza de premio/castigo podía ser creíble, ya que había dos equilibrios de Nash. No obstante, en el dilema del prisionero, en múltiples períodos, en el último período hay un sólo equilibrio de Nash. Entonces no hay una amenaza creíble de premio/castigo, por

lo que si el juego se repite en dos períodos, entonces en ambos no habrá cooperación. Ilustremos brevemente un dilema del prisionero que nos sirva:

	P	A
P	5, 5	-1, 10
A	10, -1	0, 0

En el juego anterior, hay dos países rivales. Cada país tiene la opción de hacer la paz P, o atacar A. Como notamos del juego anterior, si un país decide ser pacífico, al otro le conviene atacar. Y si un país decide atacar, al otro le conviene atacar también. Ultimadamente, el equilibrio de Nash es que ambos países ataquen, pese a que no es un óptimo de Pareto.

El dilema del prisionero se encuentra en varias situaciones de la vida cotidiana en que individualmente siempre nos conviene ser más gandallas que el otro. No obstante, la conducta predominante es cooperativa. Al respecto, Robert Axelrod publicó un libro titulado *The evolution of Cooperation*, en donde plantea la iteración del dilema del prisionero.

Uno de los puntos principales del libro era ver cómo a partir del egoismo puede desarrollarse la cooperación entre agentes. En un dilema del prisionero repetido, los agentes tienen la posibilidad de castigar en períodos futuros el rompimiento de los pactos (a diferencia del juego anterior de dos períodos, donde necesitavamos dos equilibrios de Nash).

Para esto, es necesario que el juego sea infinito. En caso de que el juego se repita un número finito y conocido de veces, con información perfecta, en el último período conviene traicionar. Anticipando esto, cada agente traicionará desde el período anterior, y así sucesivamente hasta traicionar desde el primer período, tal como sucedió en el juego del cienpiés (ver sección siguiente). No obstante, si el juego se repite en un número infinito de ocasiones, es posible encontrar un equilibrio de Nash en el que los jugadores no traicionen, al menos, desde el primer período.

Cabe remarcar que aquí no tiene mucho sentido hablar de equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, ya que no hay un número finito de juegos. Asimismo, no hay un número finito de estrategias posibles como plan completo de acción. Ante esto, las estrategias de los jugadores serán *triggering strategies* (estrategias de provocación). Esto es, los agentes decidirán algo en el primer período, y a partir del segundo período decidirán qué hacer dependiendo de lo que los demás jugadores hayan realizado en el período anterior. Por ejemplo, jugar paz en el período inicial, y continuar jugando paz si mi rival juega paz, pero atacar para todo período futuro si me atacan una ocasión (llamada *grim trigger*). Otra estrategia usada es llamada "tit for tat" (algo como ojo por ojo), y es jugar paz el primer período, y repetir la acción del rival en el período anterior para los períodos subsecuentes (esta estrategia permite "perdonar" al rival, si el rival juega paz después de haber atacado).

Vamos a estudiar una estrategia en la que los jugadores siempre juegan paz P en el primer período, P en subsecuentes mientras los demás hayan decidido P, pero si un período los atacan, ellos atacarán en todos los períodos siguientes (*grim trigger*). Es un juego de hostilidad. Vamos a demostrar que esta estrategia puede satisfacer un equilibrio de Nash (no hay incentivos a desviarse).

Supongamos adicionalmente que los individuos tienen un factor de descuento $\delta \in (0, 1)$, igual para ambos jugadores (se deja al lector ver qué ocurre con factores diferentes para cada jugador) y descuentan de forma exponencial. De tal manera, el valor presente VP de la utilidad u del individuo i en el período t cuando el perfil de estrategias jugadas por ambos jugadores es S^* está dada por:

$$PV(u_t^i(S^*)) = d^{t-1}u_t^i(S^*)$$

Empecemos suponiendo que ambos jugadores juegan paz en el primer período, y traicionar por el resto del juego si en un período el otro traiciona. Dado que ambos jugadores cumplieron su promesa desde el inicio (jugarán $\{P, P\}$), la cumplirán en cada período, de tal manera que la utilidad total será igual a la suma de utilidades descontada en cada período:

$$u^i(S*) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}u_t^i(S_t^*) = 5\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = \frac{5}{1-\delta} > 5$$

Veamos si a algún jugador le conviene desviarse. Si se va a desviar, será desde el primer período, por dos razones, ya que, si se desvía después, el otro jugador querrá anticiparse, y en segundo lugar, los resultados no varían significativamente. Entonces la estrategia en el primer período sería desviarse y recibir un pago de 6 en el primer período, y un pago de 0 para el resto de los períodos, por lo tanto, la utilidad de desviarse sería:

$$u^i(\hat{S}) = 10$$

¿Le conviene desviarse al individuo? Esto dependerá del factor de descuento. Si el factor de descuento es muy pequeño, el agente es muy impaciente y decidirá desviarse desde el inicio. ¿Qué tan pequeño? Lo suficiente para que el valor descontado de las utilidades de cumplir siempre no compense el beneficio perdido por no traicionar desde el inicio:

Entonces, si

$$u^i(\hat{S}) = 10 > \frac{5}{1-\delta} = u^i(S*)$$

El agente traicionará desde el inicio.

Despejamos, y obtenemos que si $\delta < 1/2$, el agente traicionará desde el inicio. Para otro caso, los agentes mantendrán la paz.

Hay varias estrategias posibles en el dilema del prisionero iterado. En 1980, Anatol Rapoport introdujo la estrategia *tit for tat* que consiste en ser pacífico el primer período, y a partir del segundo período imitar lo que el contrincante hizo en el período anterior. Esta estrategia tuvo como resultado un mayor grado de cooperación entre los individuos. Desde entonces, se han planteado varias estrategias que puedan llevar a un equilibrio de Nash de la mejor manera posible. Así se han introducido estrategias de posibilidad de perdón, hostilidad variante, etcétera.

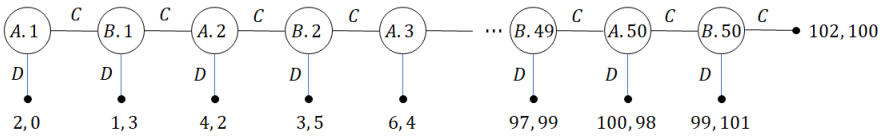
4.6 Otros juegos comunes

En ocasiones, los juegos dinámicos presentan algunos resultados paradójicos. En esta sección analizaremos dos juegos, el cienpiés y el ultimatum, mismos que dan equilibrios que, la anticipación (inducción hacia atrás) lleva a un equilibrio en que los jugadores terminan peor.

4.6.1 El cienpiés

El juego que tenemos se denota de la siguiente manera en su forma extendida:

Juego del cienpiés



En el primer período, el individuo 1 decide si detener el juego D o continuarlo C. Si lo detiene, el individuo 1 recibe 2, mientras que el individuo 2 recibe 0. Si decide continuar el juego, ahora el individuo 2 tiene la opción entre detener el juego o continuarlo. Si lo detiene, el jugador 1 recibe 1 (menos que lo que inicialmente iba a recibir) mientras que el individuo 2 recibe 3 (mejoraría su situación). Si decide continuar el juego, el individuo 1 tiene otra vez la decisión entre detenerlo o continuarlo. Si lo detiene, recibe 4 (más que lo que inicialmente iba a recibir) y el individuo 2 recibe 2 (más que lo que inicialmente iba a recibir, pero menos de lo que recibiría de haberlo detenido). Si 1 decide continuar, la decisión regresa a 2 y así sucesivamente, con los pagos denotados en la forma extendida anterior.

El juego tiene 100 períodos. Si en el último período, el individuo 2 decide detener el juego, recibe un pago de 101, mientras que el individuo 1 recibiría un pago de 99. Si el individuo 2 decide continuar el juego, éste se detiene irremediablemente, pero ahora el individuo 2 recibiría 100 (cantidad menor que si lo hubiera detenido), mientras que el individuo 1 recibiría 102.

El juego anterior trata de modelar cómo funciona la confianza entre los agentes y su voluntad para cooperar entre ellos. En este juego, parecería por un lado que los individuos querrían continuar el juego hasta llevarlo al final. No obstante, el equilibrio perfecto en subjuegos nos dice que el individuo 1 detendrá el juego desde el primer período. A este resultado llegamos fácilmente mediante inducción hacia atrás.

Partamos del último período en donde 2 tiene la opción de continuar y ganar 100 o detener y ganar 101. Entonces detendrá el juego en ese período, por lo que 1 acabaría con 99. Ahora regresémonos al período inmediato anterior. Ahora 1 tiene la opción entre continuar el juego y ganar 99 (porque 2 lo detendrá), o detener el juego y ganar 100. Entonces detendrá el juego, y 2 terminará con un pago de 98. En el período anterior, 2 se enfrenta entonces entre continuar el juego y ganar 98 (dado que 1 detendrá el juego), o detener el juego y ganar 99, por lo que le convendrá detener el juego. Podemos hacer esta inducción hacia atrás desde el primer período, sólo para descubrir que el juego será detenido desde el primer período.

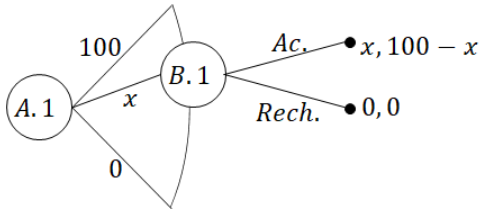
Esto lo hubieramos sabido desde que vimos juegos dinámicos. No obstante, lo puse hasta el final por dos razones, en primer lugar para aclarar el concepto de anticipación cuando hay información perfecta (que permite elaborar un plan completo de acción a partir de primeras respuestas). En segundo lugar, para mostrar los errores que se pueden dar al momento de modelar juegos. Esto se deriva de que en diversos experimentos[17] los agentes no cumplen con la predicción de los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, y detienen el juego en algún período posterior al primero, aunque tampoco suelen llegar al último período.

En estos casos se ha tratado de dar una explicación por el lado de que en realidad no se trata de un juego de información perfecta, sino de información imperfecta con incertidumbre. Esto se deriva de la cantidad de períodos que hay, y de la expectativa de tener un mayor beneficio en caso de que uno continúe el juego. Asimismo, han llegado a incluir la parte altruista de los agentes para explicar el comportamiento. Más adelante veremos un juego que, en su parte experimental, tampoco se cumple la predicción del equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, aunque nada tiene que ver la asimetría de información.

4.6.2 Ultimatum

En el juego de ultimatum, uno muy estudiado por su divergencia con las observaciones en experimentos, tenemos dos jugadores. En el primer período al agente A se le otorga una suma de dinero de \$100 y se le pide que proponga una forma de repartir el dinero $(x, 100-x)$, con $x \in [0, 100]$ entre él, A, y el otro jugador, B. En el segundo período, el individuo B decide si acepta dicha propuesta de partición o la rechaza. Si la acepta, se realiza la partición tal y como fue propuesta por A. Si la rechaza, ambos se llevan 0. El juego lo representaremos gráficamente de la siguiente forma:

Ultimatum



Como notamos, para el agente B, aceptar siempre es una estrategia debilmente dominante. Esto, ya que aceptar siempre le va a dar como pago una cantidad mayor o igual a 0, mientras que rechazar siempre le

[17] Ver:

McKelvey, R.D. & Palfrey T.R. *An Experimental Study of the Centipede Game.* Econometrica, Vol 60, No 40. Julio 1992. Páginas 803-836

Nagel, R. & Tang, F. F. *Experimental Results on the Centipede Game in Normal Form: An Investigation on Learning.* Journal of Mathematical Psychology, Vol 42. 1998. Páginas 356-384

dará como pago 0. Sabiendo esto, el agente A siempre propondrá una partición en la que A se lleve 100 y B se lleve 0. O para evitar que B rechace, elegirá una partición de 99 para A y de 1 para B[18]. No obstante, cuando el experimento se lleva a cabo entre agentes, éstos suelen rechazar siempre este tipo de propuestas que consideran "injustas"[19].

A diferencia del juego del cienpiés, en donde la información imperfecta y la incertidumbre jugaban un papel importante para que el equilibrio perfecto en los subjuegos no pudiera predecir la conducta de los agentes en la realidad, en el juego del ultimatum, el problema del juego radica en la consideración de las emociones de los jugadores. En este caso, el sentimiento de injusticia es el que impulsa a los jugadores a tomar decisiones que, *ex ante*, parecen ser irracionales.

4.6.3 Un juego de negociación

El escenario que proponemos es un ultimatum ampliado, en donde hay posibilidad de aceptar, rechazar, o realizar una contraoferta. Digamos que en el primer período el jugador A le propone al jugador B elegir una cantidad x_1 entre 0 y 1 (para normalizar). El jugador B tiene la opción en el segundo período de aceptar o rechazar dicha oferta. Si la acepta, el jugador A recibe $1 - x_1$ y el jugador B recibe x_1. Pero si rechaza la oferta, el juego continua al tercer período en donde ahora el jugador B puede hacer una contra oferta x_2 entre 0 y 1. Si A acepta la oferta en el cuarto período, A recibe x_2 y B recibe $1 - x_2$, pero si la rechaza ambos reciben 0. Entre cada par de períodos media una tasa de descuento intertemporal dada por δ, igual para cada jugador (puede ser diferente si cada jugador tiene preferencias intertemporales distintas).

Este no es un juego repetido, pese a que se parezcan, porque los jugadores no juegan el mismo juego en cada período. Pero podemos encontrar un equilibrio perfecto en los subjuegos. En el penúltimo período, sabemos que el jugador B va a ofrecer a 0 al jugador A, quien lo va a aceptar porque aceptar siempre es una estrategia débilmente dominante. Entonces, los pagos serían de $(u_A, u_B) = (0, 1)$ en el último período. No obstante, como media la tasa de descuento, en el primer período este pago se traduciría de manera descontada como $(u_A, u_B) = (0, \delta)$.

Estos son los pagos descontados que recibirían al final del juego en caso de que B rechazara la oferta en el primer período. Entonces, notamos que en el segundo período, B rechazará cualquier propuesta menor que δ y aceptará cualquier propuesta mayor o igual a δ. Entonces, si A ofrece un pago menor a δ en el primer período, eventualmente va a ganar 0 (porque B rechazaría para irse al tercer período). Previendo esto, en el primer período A va a ofrecer $x_A = \delta$, y los pagos serían $(u_A, u_B) = (1 - \delta, \delta)$. En este juego, el ENPS está dado por A ofreciendo δ en el primer período y aceptando cualquier oferta en el cuarto período, mientras que B acepta cualquier oferta mayor o igual a δ y rechaza en otro caso en el segundo período, mientras que en el tercer período ofrecería 0 a A.

El juego descrito anteriormente es recurrente en la para explicar la teoría de la negociación. El juego original fue propuesto en 1972 por Ingolf Stahl [20] para un horizonte finito de T períodos. Un equilibrio para un horizonte infinito fue encontrado por Ariel Rubinstein en 1982 [21]. Al juego se le conoce como "negociación de Rubinstein-Stahl". El resultado más importante para la teoría de negociación es que las partes pierden poder de negociación entre más contraofertas puedan hacer las contrapartes. Esto, ya que existe un descuento en el pago por esperar la contraofetta (andar negociando quita tiempo).

Retomemos brevemente el juego cuando $T = 1$, que estamos de regreso al ultimatum. El jugador que puede hacer una propuesta a la "tómalo o déjalo" tiene prácticamente todo el poder de negociación, pues se queda con todo el excedente social derivado del juego (en el ultimatum, el excedente social es 1, y se lo apropia quien juega primero). Pero este poder se diluye cuando al contraparte puede proponer otra forma de división.

Asimismo, una conclusión importante para el horizonte infnito es que quien tenga mayor paciencia (mayor

[18] Podríamos decir que una cantidad ϵ menor a 100, con ϵ tendiente a 0 para A, y una cantidad ϵ para B, pero nos estamos ahorrando la molestia que generan las ϵ's.

[19] Ver:

Sanfey et. alt. *The Neural Basis of Economic Decision-Making in the Ultimatum Game.* Science, New Series, Vol. 300, No. 5626. Junio, 2003. Páginas 1755-1758.

[20] Stahl, I. *Bargainingh Theory.* Stockholm. Stockholm School of Economics. 1972

[21] Rubinstein, A. *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model.* Econometrica, Vol. 50, No. 1. 1982.

δ) obtiene una mayor proporción del pago. La solución de Rubinstein es que en el primer período, el jugador i propone que su proporción (s_i) sea:

$$s_i = \frac{1-\delta_j}{1-\delta_i\delta_j}$$

Y propone que la proporción de j (s_j) sea:

$$s_j = \frac{\delta_j(1-\delta_i)}{1-\delta_i\delta_j}$$

Vemos a partir de las ecuaciones anteriores que quien tiene más paciencia puede obtener una mayor proporción del premio a dividir. Derivando:

$$\frac{\partial s_i}{\partial \delta_i} = \frac{(1-\delta_j)\delta_j}{(1-\delta_i\delta_j)^2} > 0$$

Entre más paciente sea i (mayor δ_i) mayor su proporción s_i.

$$\frac{\partial s_i}{\partial \delta_j} = \frac{-(1-\delta_i)}{(1-\delta_i\delta_j)^2} < 0$$

A mayor paciencia de j (mayor δ_j), menor su proporción s_i del premio. Como $s_i + s_j = 1$, el análisis es similar para el caso de la proporción de j, s_j.

Esto explica por qué en parte las empresas grandes tienen mayor poder de negociación sobre las pequeñas. Sus niveles de activos superiores a los de las empresas pequeñas se traducen en una "mayor paciencia" (bajo ciertas circunstancias).

Imaginemos un litigio en el que A haya causados daños a B por $\$100,000$, los cuales ganaría seguramente de regreso en caso de que se fueran a juicio. En ocasiones, las partes no se van a un juicio que podría durar años, sino que resuelven la situación, digamos, A ofrece compensar a B con $\$80,000$. y B sabiendo que puede obtener los cien mil pero tardaría algunos años, prefiere aceptar la propuesta. No obstante, las partes en ocasiones se van a juicio. Ésto es así, ya que las partes tienen factores de descuento distinto, o creencias distintas sobre la probabilidad que tiene B de ganar el juicio.