Monopolio y Discriminación de Precios

Diogenes Cruz Figueroa García

Marzo 2022

1 Introducción

En los cursos introductorios de economía, el supuesto básico detrás de los modelos de equilibrio parcial y equilibrio general es que los agentes son competitivos, esto es, toman los precios de los bienes como dados. En otras palabras, en el problema de maximización de utilidad/utilidades, los precios son paramétricos; una vez que los agentes observan el precio del mercado, deciden cuantas unidades comprar o vender. Tras esto, el interés está en encontrar las cantidades y los precios de equilibrio: los precios para todos los mercados tales que no exista exceso de oferta o de demanda.

El modelo competitivo es útil en mercados con un número elevado de consumidores y productores, y con suficiente flexibilidad tanto en precios como en factores productivos. El caso extremo del modelo competitivo es la competencia perfecta.

En la presente nota, el interés es cambiar de estructura de mercado[1] al monopolio. El supuesto es que los consumidores son precio aceptantes, pero existe una única empresa oferente que sabe que puede alterar el precio si altera la cantidad, y usa esto a su favor. En particular trataremos los modelos de monopolio no regulado.

La manera de estructurar esta nota es la siguiente. En primer lugar, se verá el caso clásico del monopolio, como una empresa que puede cobrar cualquier precio, pero se sujeto a la función de demanda. Por su parte, habrá una única demanda (individual o agregada) que va a tratar el monopolio, independientemente de los agentes que la compongan. En segundo lugar, pasaremos a los casos de discriminación, en donde el monopolio sabe que enfrenta demandas distintas, y puede actuar acorde para maximizar utilidades. El marco serán los modelos descritos por Pigou, empezando por cuando el monopolista cuenta con información perfecta y por tanto puede incurrir en discriminación de primer grado (discriminación perfecta), e información imperfecta, en donde distinguimos los modelos cuando el monopolista podría separar a la demanda a través de métodos de *screening* (discriminación de segundo grado), y aquellos en donde la demanda se separa a través de los métodos de señalización, *signalling* (discriminación de tercer grado).

2 Monopolio Puro

2.1 Modelo clásico de monopolio

El caso tradicional que se ve en los cursos introductorios de economía es el siguiente. Los individuos maximizan una función de utilidad por un bien, generalmente desconocida, que tiene como resultado una función de demanda de la forma:[2]

$$Q^D(P) = a - bP$$

[1] El contexto de interacción entre oferentes y demandnates

[2] Los modelos lineales en general son más fáciles de analizar y de estimar, y se puede justificar a través de una expansión de Taylor.

En el caso de este monopolio, las empresas podrán elegir precios o cantidades de manera indistinta, y obtendrán el mismo resultado al maximizar. Para efectos, definiremos la demanda inversa como una función precio que depende de la cantidad vendida. En general, $P(Q)$, y en concreto:

$$P(Q) = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q$$

Por simplicidad, supondremos que:

$$\frac{a}{b} = A$$

$$\frac{1}{b} = B$$

Por lo que la especificación de la demanda inversa está dada por:

$$P = A - BQ$$

Por su parte, las empresas tendrán una función de beneficios dadas por la siguiente especificación:

$$\Pi(P, Q) = P \times Q - CT(Q)$$

En donde $CT(Q)$ es la función de costos totales de la empresa de producir Q unidades del bien. No obstante, la empresa sabe que puede alterar precios vía la cantidad demandada. Por esto, la empresa puede introducir la demanda (o la demanda inversa) en su función de beneficios para maximizar. Antes de hacer esto, resolvamos el problema de maximización de la empresa suponiendo que es competitiva (precio está dado).

$$\max_{Q} PQ - CT(Q)$$

Por condiciones de primer orden, derivando respecto a Q, y llegamos al resultado de la empresa competitiva, precio igual a costo marginal:

$$P = CMg(Q)$$

Del lado izquierdo tenemos el precio, mientras que del lado derecho tenemos la primera derivada de los costos (es decir, el costo marginal). ¿Por qué igualamos el precio al costo marginal? En sentido estricto, lo que estamos igualando es el ingreso marginal al costo marginal. En el modelo competitivo, el precio coincide con el ingreso marginal del monopolista: cada unidad adicional será vendida al precio P que determine el mercado. De manera importante hay que enfatizar que para que la empresa sea competitiva basta con que la empresa *crea* que no pueda alterar el precio del mercado.

La razón por lo que la empresa iguala el ingreso marginal al costo marginal se debe a lo siguiente. Supongamos que una unidad adicional del bien me va a generar \$5 de ganancia, y me cuesta \$3 producirla, por lo que, si la produzco, tengo un beneficio neto de \$2; entonces, en el margen, a la empresa le conviene producirla. En caso de que una unidad adicional del bien me generara \$5 de ingresos, pero me costara \$8 producirla, perdería \$3, por lo que no conviene producirla. Este punto medio cuando deja de convenir producir unidades adicionales y comienza a ser perjudicial es cuando los costos y los ingresos marginales se igualan. Cuando esto sucede, la empresa está indiferente entre producir esa unidad adicional o no prouducirla. Para cerrar el modelo, suponemos que ante la indiferencia sí produce la unidad adicional.

Ahora, si los monopolistas saben que pueden alterar el precio cuando alteran la cantidad vendida, pueden incluir conocimiento en su modelo de optimización. Es decir, los beneficios de la empresa están dados por:

$$\Pi = P(Q)Q - CT(Q)$$

En donde el precio $P(Q)$ representa la demanda inversa, de tal suerte que el monopolista sabe que este precio cambia cuando cambia la cantidad. Así, maximizar los beneficios indicados arriba nos daría como condición de primer orden lo siguiente:

$$P(Q) + P'(Q)Q = CMg(Q)$$

Del lado derecho de la ecuación tenemos los costos marginales al igual que en el caso competitivo. Pero del lado izquierdo, los ingresos margnales de la empresa han cambiado. El primer elemento, $P(Q)$ sigue teniendo la interpretación anterior: la unidad adicional producida me va a generar un ingreso igual al precio al que la vendo. El segundo elemento nos dice que este cambio en la cantidad va a cambiar el precio en $P'(Q)$, y que va a afectar a las Q unidades venedidas inicialmente inframarginales.[3]

Esta información adicional que adquiere el monopolista, a saber, cómo la cantidad ofrecida altera el precio, le permite al monopolista tomar una mejor decisión sobre la cantidad que va vender. ¿Venderá más o menos?

De la función de ingresos totales de la empresa $IT = P(Q)Q$, derivando respecto a la cantidad obtenemos la función de ingreso marginal:

$$IMg(Q) = P(Q) + P'(Q)Q$$

Por lo que:

$$IMg(Q) - P'(Q)Q = P(Q)$$

Dado que la función de demanda es decreciente (al igual que su función inversa), es decir $P'(Q) < 0$, y de la expresión anterior tenemos entonces que:

$$IMg(Q) < P(Q)$$

Es decir, el ingreso marginal está por debajo de la función de demanda inversa. Por lo tanto, la intersección entre el costo marginal y el ingreso marginal (monopolio) se tiene que dar en una cantidad Q menor que la intersección entre la demanda inversa y el costo marginal (competencia perfecta). De aquí que la cantidad producida en el monopolio tradicional sea menor que bajo competencia.

Regresemos a la condición de eficiencia del monopolio:

$$P(Q) + P'(Q)Q = CT'(Q)$$

Reordenando los términos y cambiando la notación:

$$P(Q) - CMg(Q) = -\frac{dP}{dQ}Q$$

Dividiremos ambos términos entre P:

$$\frac{P(Q) - CT'(Q)}{P(Q)} = -\frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P(Q)}$$

Como la función de demanda es estrictamente decreciente (al igual que su inversa), entonces podemos rescribir:

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{\frac{dQ}{dP}}$$

Sustituimos el término anterior, y reordenamos para obtrener:

$$\frac{P(Q) - CMg(Q)}{P(Q)} = -\frac{1}{\frac{dQ}{dP}\frac{Q}{P(Q)}}$$

[3]Recordemos que esto viene de un problema continuo de diferenciación, por lo que los cambios marginales son, precisamente, infinitesimalmente cercanos a cero, por lo que no hace falta distinguir entre precio anterior y precio nuevo, o cantidad anterior y cantidad nueva.

Notamos que lo que tenemos en el denominador del lado derecho es la elasticidad precio de la demanda. Entonces:

$$\frac{P(Q) - CMg(Q)}{P(Q)} = -\frac{1}{\varepsilon_Q}$$

Del lado izquierdo tenemos al índice de Lerner. [4] Este índice nos da una idea de concentración de poder monopólico en el mercado. Notamos que bajo competencia perfecta, el precio iguala al costo margial, por lo que el Índice de Lerner se iría a 0 (Modelo competitivo). Por otro lado, en la medida en que el precio se aleja infinitamente del costo marginal, el índice tiende a 1. El índice de lerner es, entonces, una medida de poder de mercado: qué tanto puedo subir precios sobre el costo marginal.

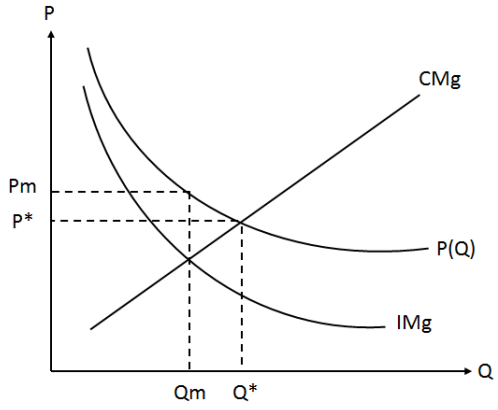
La ecuación anterior relaciona el poder de mercado de la empresa dependerá al inverso de la elasticidad de la demanda: el índice de lerner en el equilibrio del monopolio será igual al negativo del recíproco de la elasticidad de la demanda. Notamos también que, como el Índice de Lerner sólo se puede colocar entre 0 y 1, necesariamente el monopolista venderá en la parte donde la elasticidad de la demanda es mayor a 1 (en valor absoluto), esto es, donde la demanda es elástica.

La intuición es sencilla. Sabemos que la elasticidad es una medida de respuesta de la demanda ante cambios en el precio. Si la demanda es muy elástica, eso quiere decir que con poco que nos suban el precio, la cantidad demandada disminuirá mucho (muy elástica). En cambio, si la demanda es inelástica, ante cambios grandes en el precio, la cantidad demandada disminuye poco (poco elástica). Cuando el monopolista se coloca en la parte inelástica, eso significa que si sube el precio en 10%, la cantidad disminuirá en menos de 10%, por lo que su ingreso por ventas aumentará; como la cantidad disminuye, sus costos totales disminuyen igualmente, y entonces el monopolista necesariamente va a estar mejor subiendo el precio. Por esto, el monopolista continuará elevando el precio hasta encontrarse en la parte elástica de la demanda.

En donde la demanda es elástica, si el monopolista sube poco su precio, la cantidad disminuirá mucho, por lo que no le conviene subir los precios. Este resultado es importante, pues nos dice que el poder de mercado dependerá también de la elasticidad de la demanda.[5]

Antes de pasar a la súper empresa, veamos una descripción gráfica de lo anterior.

Gráfica 1



En la gráfica anterior, notamos que el Ingreso Marginal está siempre por debajo de la curva de demanda inversa. Adicionalmente, existe una curva de costo marginal que intersecta a la curva de ingreso marginal

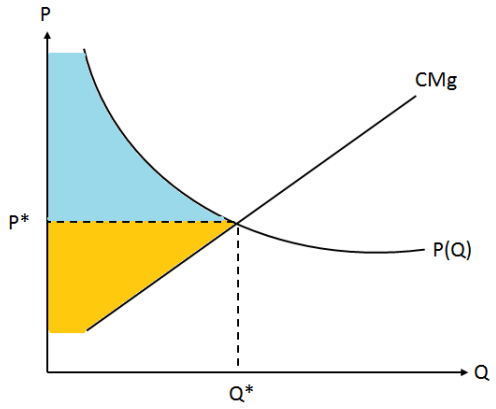
[4] Nombrado así por el trabajo de Abba Lerner de 1934 "The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly" publicado en el Review of Economic Studies.

[5] Esto puede tener repercusiones importantes de política. Por ejemplo, no prohibir determinados monopolios porque es difícil, sino fomentar la existencia de productos sustitutos que vuelvan más elástica la demanda.

en una cantidad inferior a la cantidad en la que intersecta a la demanda inversa. El precio de equlibrio y la cantidad de equilibrio en un mercado competitivo están dadas por (P^*, Q^*), respectivamente, mientras que el precio y cantidad de monopolio están dados por (Pm, Qm).

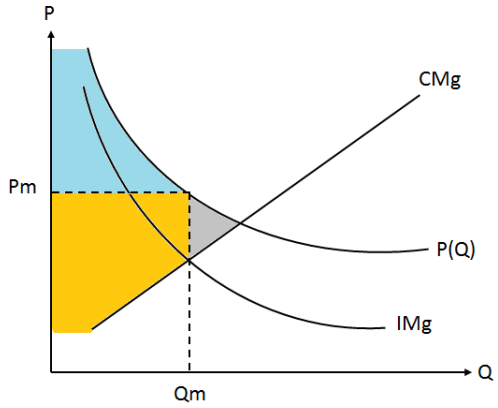
No obstante que nos encontramos en un monopolio, sigue habiendo ganancias por el comercio. Este excedente está dado para los consumidores por la cantidad a la que estaban dispuestos a comprar una unidad, y el precio efectivamente pagado. Del lado de los productores, por la diferencia entre el precio cobrado y el precio al que estaban dispuestos a ofrecer el bien. Esto está dado por las áreas entre las curvas y el precio en cada momento. Para el caso de mercados competitivos, los excedentes se ven de la siguiente manera:

Gráfica 2



El área superior representa el excedente del consumidor, y el área inferior representa el excedente del productor. Por su parte, en el mercado monopólico, los excedentes están dados de la siguiente manera:

Gráfica 3



Notamos que indubitablemente el consumidor pierde excedente. Por su parte, el productor pierde un poco de excedente derivado de la menor cantidad, pero gana más al vender por arriba del precio de competencia (excedente que antes percibía el demandante). El área del triángulo a la derecha es el excedente del ideal de mercados competitivos que antes se generaba, y que bajo el monopolio ya no se genera. Este excedente perdido es, valga la redundancia, una pérdida en bienestar social (lo pierde el consumidor y/o el productor, sin que algún otro agente lo gane).

Cabe aclarar que el bienestar social W está dado por la suma de los excedentes (en donde EC es el

excedente del consumidor y EP es el excedente del productor) [6]:

$$W = EC + EP$$

Por eso, si el productor le "roba" excedente al consumidor, no se considera como una pérdida de bienestar social, ya que lo que se sustrae de EC se suma a EP. Por lo anterior, en la Gráfica 3, sólo el triángulo gris es considerado una pérdida en el bienestar social.

2.2 Dinero sobre la mesa

Uno de los principales problemas del monopolio puro es el "dinero dejado sobre la mesa", es decir, dinero que el monopolista podría estar recibiendo del comercio, pero que no está captando. En el modelo clásico del monopolio tenemos un supuesto de precio lineal: pq. Es decir, el monopolista cobra un único precio unitario, sin importar el número de unidades. No obstante, es común que los monopolistas cuenten con esquemas distintos de precios, en donde a mayores cantidades, el precio promedio disminuye (descuentos por volumen), o que en lugar de un único precio, existen tarifas en dos partes, esto es, una tarifa fija, más un precio unitario.[7] En general, estos son mecanismos por los cuales el monopolista extrae mayor excedente de los consumidores, y obtiene mayores ganancias.

Nos enfocaremos en las tarifas de dos partes, y para ejemplificar nos iremos al extremo de una "súper empresa" que conoce perfectamente la disposición de pago de los consumidores, y tiene completa libertad para fijar precios a una única demanda.[8], pero que nos servirá para sacar una métrica y determinadas conclusiones.

¿Cuál es la tarifa máxima que podrá cobrar el monopolista? Partamos del caso de un único precio lineal, y supongamos que el equilibrio del monopolista está dado por 500 unidades a un precio de 10 cada una, y el excedente del consumidor está dado por $10,000$. Si el monopolista pudiera fijar una tarifa en dos partes, y dejara el precio en 10, aún si la parte fija fuera de $9,999$ en total para el mercado, los consumidores estarían dispuestos a comerciar, pues tendrían un excedente de 1. Por simplicidad, suponemos que incluso si tienen un excedente de cero, comerciarían.

Recordemos que el excedente del consumidor no es más que el área bajo la curva de demanda a partir del precio pagado (considerando que graficamos al revés, es el área a la izquierda de la curva graficada, y para arriba del precio pagado). Esto es, para un consimidor, con una función de demanda $Q(P)$, su excedente del consumidor por pagar un precio P está dado por:

$$\int_P^\infty Q(X)dX$$

Una manera alternativa de verlo es reconocer a la demanda inversa como el beneficio marginal del consumidor.[9], es decir, cuánto está dispuesto a pagar el consumidor por cada unidad adicional que compra. Así, el beneficio bruto del consumidor está dado por:

$$\int_0^Q P(X)dX$$

en donde $P(X)$ representa la demanda inversa/beneficio marginal. Si además el consumidor ya está pagando $P \times Q$, este excedente del consumidor sería:

[6] En sentido estricto, el excedente del productor se genera sin considerar los costos fijos, ya que las empresas en el corto plazo no los consideran. Si consideramos los costos fijos, entonces, deberíamos restarlos al bienestar social para obtener una mejor medida. Para el caso en concreto, suponemos la ausencia de costos fijos, por lo que el excedente del productor coincide con los beneficios de la empresa.

[7] Por ejemplo, las membresías de Costco o Sam's Club, con un precio por ser miembro, más el precio de las mercancías vendidas, o una membresía para el gimnasio, en donde hay una mensualidad, con un precio cero por cada visita al gimnasio.

[8] Si bien la información perfecta es un caso hipotético, hay formas en que las empresas puedan acercarse a la información perfecta. Con el diseño de mecanismos, diversas empresas generan algoritmos para el seguimiento de preferencias vía patrones de conducta en internet, y así generar contenido para mantener a los consumidores enganchados en los sitios y vender más publicidad.

[9] Bajo determinados supuestos del problema de maximización de utilidad, esto es el caso.

$$\int_0^Q P(X)dX - P(Q)Q$$

Este "excedente" es lo máximo que está dispuesto a pagar el consumidor. Si bien la tarifa es fija para el consumidor, para el productor, al momento de elegir su esquema, reconoce que la máxima tarifa que podrá cobrar es una función de Q.

En lugar de elegir cantidades, ahora el monopolista elegirá precios. Así, los posibles beneficios de la empresa están dados por:

$$\Pi = P(Q)Q + \left(\int_0^Q P(X)dX - P(Q)Q\right) - CT(Q(P))$$

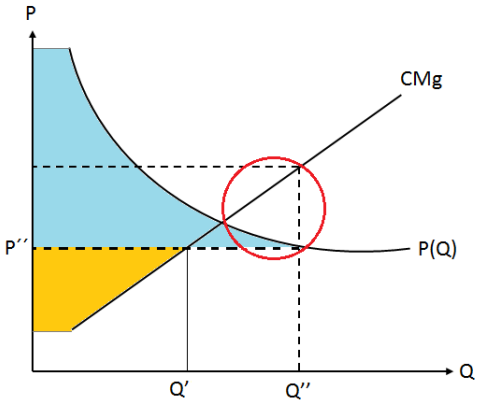
Notamos cómo ahora el precio que elija el productor va a afectar los beneficios totales por dos vías. En primer lugar, el mecanismo que ya teníamos desde un inicio, que son los ingresos por ventas totales $Q(P)P$, pero ahora el término entre paréntesis se refiere a la tarifa que el monopolista podrá cobrar. Maximizar estos beneficios es más fácil de lo que parece. Notamos en primer lugar que el componente del precio lineal desaparece; en cuanto a la integral, recordemos que la derivada es el inverso de la integral por el teorema fundamental del cálculo. Las condiciones de primer orden de maximizar los beneficios dados por la ecuación anterior, y obtenemos:

$$P(Q) = CT'(Q)$$

Es decir, el monopolio cuando puede ejercer discriminación en primer grado, iguala el beneficio marginal (inverso de la demanda) al costo marginal, tal y como sucede bajo condiciones de competencia. La intuición es sencilla. Si el monopolista puede extraer la totalidad del excedente del consumidor, entonces los beneficios del monopolista son iguales al excedente de la economía. Esto lo notamos desde la función objetivo donde, tras cancelar los términos de $P(Q)Q$, los beneficios son los beneficios totales menos los costos totales. A diferencia del modelo clásico de monopolio, ahora no hay pérdida del bienestar social, y el resultado es óptimo de Pareto: no puedes mejorar a los consumidores (darles tantito excedente) sin empeorar al monopolio. Una vez más, un caso en donde claramente óptimo de Pareto no tiene relación alguna con conceptos de justicia o equidad.

En la gráfica 4 ejemplificamos qué ocurre si el monopolista cobra un precio tal que la cantidad intercambiada sea Q'' mayor al óptimo social. A esa cantidad, el consumidor recibe un excedente igual al área entre el precio y la curva de demanda, hasta la cantidad demandada. Por su parte, el productor recibe un excedente hasta la cantidad Q', ya que cada una de esas unidades las vende a un precio mayor al costo marginal de producción. A partir de dicha cantidad, el precio se ubica por debajo del precio marginal de producción, por lo que es una pérdida para el productor. Una parte de esa pérdida del productor se la apropia el consumidor, y está dada por el área sombreada del triángulo que está entre Q' y Q'', por lo que en el neteo, ese excedente adicional del consumidor se "neutraliza" en la suma del bienestar social porque es parte de la pérdida para el productor. No obstante, hay una parte de la pérdida total del productor que nadie se apropia, dada por el área del triángulo circulado al lado derecho de la gráfica. En el neteo, el bienestar social disminuyó en esta cantidad, con respecto al inicial en la gráfica 2.

Gráfica 4



Con esto, hemos demostrado que la cantidad que maximiza el bienestar social, y por lo tanto, los beneficios del monopolista que discrimina en primer grado, es aquella resultante de igualar el costo marginal de producción a la curva de demanda. No obstante, en la discriminación en primer grado es posible que el monopolista se encuentre con más de un consumidor.

3 Discriminación de Primer Grado

En los modelos anteriores habíamos supuesto que el monopolista enfrentaba una única demanda agregada, ya sea porque no había forma de distinguir entre consumidores, o porque todos los consumidores son indénticos. Si es posible distinguir entre los consumidores, mediante cualquier mecanismo, el monopolista podrá cobrar precios distintos a cada tipo de consumidor y así incrementar sus beneficios. Un supuesto adicional que incluiremos es la imposibilidad de arbitraje: los consumidores no pueden acudir a otro mercado a conseguir un el mismo producto más barato (o no lo pueden comprar de un revendedor).

Vamos a generalizar el modelo para n consumidores. y vamos ahora a resolver el problema en función de los precios. Esto nos servirá más tarde también, ya que el gobierno en general puede regular a los monopolios vía control de los precios, por lo cual es importante mantener a los precios como la variable de decisión importante.

Generalicemos entonces el modelo de la siguiente manera. Supongamos que hay n individuos. Cada individuo $i \in \{1, .., n\}$ tiene una función de demanda $q_i(p_i)$ que depende del precio que le cobran a dicho individuo, p_i. Como habíamos mencionado, cada precio para cada individuo puede ser distinto. De esta manera, los ingresos que reciba el monopolio por venta del bien al individuo i serán $q_i(p_i)p_i$. Como el monopolio vende el producto a n individuos, los ingresos totales por ventas son la suma de los ingresos por ventas a cada individuo:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(p_i)p_i$$

Ahora bien, adicional a los ingresos por ventas, el monopolio le puede cobrar a cada individuo una tarifa, misma que ya dijimos será igual a su excedente de consumidor. Esta tarifa puede ser también diferente para cada individuo. La tarifa que puede cobrar a cada individuo está dada por:

$$\int_{p_i}^{\infty} q_i(x_i)dx_i$$

Por lo que el total de ingresos del monopolio por tarifas está dado por:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{p_i}^{\infty} q_i(x_i) dx_i$$

La expresión anterior puede parecer complicada, pero recordemos que la suma es un operador lineal, por lo que las integrales son separables. Ahora bien, del lado de los costos, la empresa tiene una función de costos totales dada por $CT(Q)$, en donde:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i(p_i)$$

Es importante enfatizar en que los costos totales del monopolio dependerán de la cantidad agregada de producción.

Por la expresión anterior, podemos decir que la cantidad total es una función que depende de las cantidades individuales, cada una dependiente de su propio precio. Ahora sí podemos escribir el problema de maximización de nuestra súper empresa que discriminará a todos los individuos:

$$\max_{\{p_i\}_{i=1}^{n}} \sum_{i=1}^{n} q_i(p_i) p_i + \sum_{i=1}^{n} \int_{p_i}^{\infty} q_i(x_i) dx_i - CT(Q)$$

Obtenemos las condiciones de primer orden derivando respecto al precio de cualquier individuo p_i:

$$\left[\frac{dq_i(p_i)}{p_i} p_i + q_i(p_i) \right] - q_i(p_i) = \frac{dCT(Q)}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial q_i} \frac{dq_i(p_i)}{p_i}$$

Sabemos que $\frac{\partial Q}{\partial q_i} = 1$ ya que Q no es más que la suma de las q_i. Asimismo, sabemos que $\frac{dCT(Q)}{dQ}$ es el costo marginal de producción, el cual es constante en i (notamos cómo es que no tiene ningún subíndice i, por lo que el costo marginal es independiente de si la unidad adicional que produzco se la vendo a i o se la vendo a j). Llamemos a este costo marginal Cmg. Entonces, de la expresión anterior, eliminando términos, y despejando obtenemos que:

$$\frac{dq_i(p_i)}{p_i} \Big[p_i - Cmg \Big] = 0$$

De las funciónes de demanda decrecientes sabemos que el término fuera de los corchetes es estrictamente menor a cero, por lo que en el óptimo:

$$p_i = Cmg$$

Notamos que esto aplica para cualquier i. Dado que el costo marginal de producción no depende de si la unidad extra producida se la vendo a i o a j, esta ecuación funciona para cualquier i, de tal forma que habrá un único costo unitario para todos los consumidores, e igual al costo marginal de producción evaluado en el total de unidades vendidas. Lo único que cambiará entonces será la tarifa que le cobro a cada individuo.

Recapitulando, si el monopolio puede discriminar en primer grado, el precio que el monopolista cobrará a todos los individuos será el costo marginal. En este sentido, basta con igualar el costo marginal a la demanda agregada (entendida como la suma de todas las demandas individuales) para encontrar el precio óptimo para el monpolista. Recordemos que la demanda agregada es la suma horizontal de todas las demandas. Es decir, para cada precio, la cantidad demandada total. Así, si el precio es \$5, y el consumidor A compraría 7 unidades a ese precio, y el consumidor B compraría 3 unidades, la cantidad agregada demandada es de 10.[10]

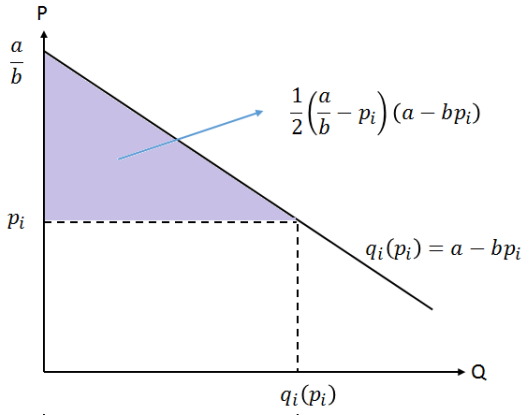
[10] De la propia definición de demanda agregada se desprende que al momento de maximizar beneficios, ésta sólo puede ser utilizada si se cobran precios iguales (a un precio P para todos los individuos, la suma de las cantidades individuales que están dispuestos a consumir). Por el resultado generalizado de discriminación de primer grado $p_i = Cmg$, podemos utilizar la demanda agregada porque ya sabemos que los precios serán iguales. En otros casos, si no sabemos si los precios serán iguales, no tiene sentido utilizar la demanda agregada.

Una última aclaración antes de pasar al siguiente tema. En general esto se hizo como una integral de cero a infinito. Esto aplica independientemente de la forma funcional de la demanda. En el caso de las demandas lineales, tenemos que recordar que, si bien el problema puede decir $q = a - bp$, la especificación completa es:

$$q = \begin{cases} 0 & si \quad p > \frac{a}{b} \\ a - bp & si \quad 0 < p \leq \frac{a}{b} \\ a & si \quad p \leq 0 \end{cases}$$

Si bien el precio nunca será menor a cero, la última parte nos sirve para especificar debidamente la forma funcional de la demanda. No obstante, sacar integrales en este caso puede resultar un poco tedioso. Por eso podemos sacar el excedente del productor como el área de un triángulo (base por altura entre 2). En la siguiente gráfica se ve esto más a detalle.

Gráfica 5



Regresando a la función de demanda lineal, se sostiene también el **igualar la demanda agregada a la función de costo marginal** para obtener el precio óptimo para el monopolista que discrimina en primer grado. Posterior a eso, sustituimos el precio óptimo en la función de tarifa óptima (el excedente del consumidor) para conseguir la tarifa que maximiza los beneficios del monopolista. Hay que recordar que al momento de sumar demandas, la demanda lineal puede estar dada por partes. Supongamos las siguientes dos funciones de demanda lineal:

$$q_1 = a - bp_1$$
$$q_1 = m - np_1$$

La especificación completa es:

$$q_1 = \begin{cases} 0 & si \quad p_1 > \frac{a}{b} \\ a - bp_1 & si \quad 0 < p_1 \leq \frac{a}{b} \\ a & si \quad p_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 > \frac{m}{n} \\ m - np_2 & si \quad 0 < p_2 \leq \frac{m}{n} \\ m & si \quad p_2 \leq 0 \end{cases}$$

Al momento de sumar las demandas, como el monopolista va a fijar el mismo precio a ambos individuos, no tiene sentido hacer la distinción entre p_a y p_b, por lo que diremos que ambos son iguales, e iguales a p (No podemos hablar de una demanda agregada si cada consumidor percibe precios distintos, en cuyo caso habría varias demandas, pero no agregadas). Asimismo, asumiremos por simplicidad que $a > m$ y que $b = n = 1$. Rescribimos la especificación de las demandas:

$$q_1 = \begin{cases} 0 & si \quad p > a \\ a - p & si \quad 0 < p \leq a \\ a & si \quad p \leq 0 \end{cases}$$

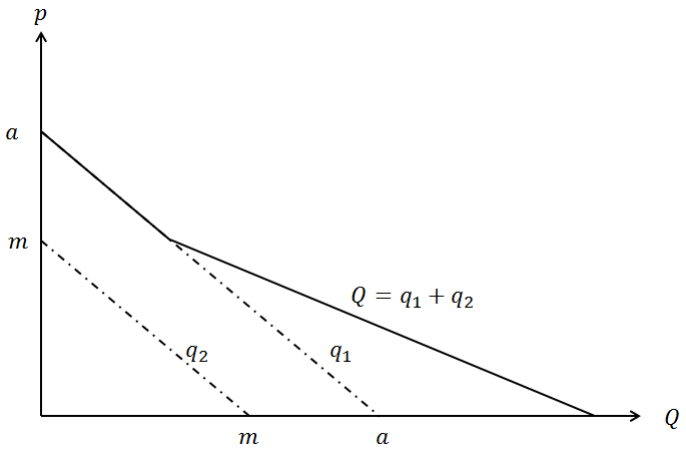
$$q_2 = \begin{cases} 0 & si \quad p > m \\ m - p & si \quad 0 < p \leq m \\ m & si \quad p \leq 0 \end{cases}$$

Ahora sí, notemos que el individuo 1 va a consumir si el precio es menor a a. El consumidor 2 va a consumir únicamente si el precio es menor a m. Pero hay un intervalo, dado que $a > m$, en el que sólo el consumidor 1 va a comprar. Definimos la demanda agregada del bien como $Q(P) = q_1(p) + q_2(p)$, y se ve de la siguiente forma:

$$Q = \begin{cases} 0 & si \quad p > a \\ a - p & si \quad m < p \leq a \\ (a + m) - 2p & si \quad 0 < p \leq m \\ a + m & si \quad p \leq 0 \end{cases}$$

Gráficamente:

Gráfica 6



Las líneas punteadas representan cada demanda individual, mientras que la línea gruesa representa la demanda agregada. Al momento de igualar la demanda agregada con el costo marginal, hay que asegurarse de que éste cruce a aquealla en la línea gruesa, independientemente de se atraviesa la línea punteada antes.

4 La autoselección: Discriminación en segundo grado

Bajo este tipo de discriminación, los monopolios poseen menor información de los agentes, o está restringido por el gobierno para actuar en torno a este tipo de información para discriminar a los agentes. Así, el monopolista sabe que existen dos tipos de demanda (por ejemplo, consumidores con una alta valuación por el bien, y consumidores con una baja valuación por el bien), pero no puede distinguir a cada uno de estos consumidores, por lo que se encuentra frente a un problema análogo a los de *selección adversa*. Por esto, el monopolista decide ofrecer descuentos por volumen, de tal atendiendo al perfil de demanda de cada agente, de tal manera que pueda extraer la mayor cantidad de utilidad de cada uno de estos demandantes. Así, el precio unitario será menor para los consumidores que compren mayor número de unidades, y mayor para los consumidores que compren un número reducido de unidades.

En general, estas estrategias se conocen como tarifas no lineales, y es bastante común verlas en la realidad, por ejemplo, cuando es más barato comprar una caja con 12 cartones de leche, que comprar 12 cartones de leche individualmente. Ejemplos más sofisticados sobre este "empaquetamiento" de unidades son los planes de telefonía móvil que incluyen un pago mensual fijo distinto, según el volumen de consumo, y que en general reflejan un precio promedio menor cuanto mayor sea el volumen contratado. La estrategia en general para

identificar a los consumidores mediante la autoselección se conoce como *screening*.

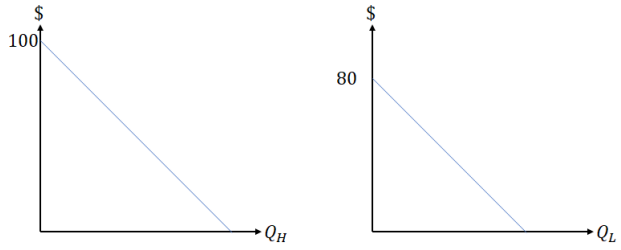
Vamos a tomar un ejemplo. Supongamos que en un mercado existen las siguientes dos funciones de demanda inversa, ambas conocidas por el monopolista:

$$P_H = 100 - Q$$

$$P_L = 80 - Q$$

En estas demandas, definimos a H como una demanda "grande", y a L como una demanda "chica"; esto es, para cada cantidad Q, los demandantes tipo H están dispuestos a pagar más que los individuos L. Las demandas anteriores puede ser visualizadas en las siguientes gráficas:

Gráfica 7



Ahora, supongamos que el monopolista tiene un costo marginal constante e igual a $c = 10$. En caso de que el monopolista pudiera discriminar perfectamente (discriminación de primer grado), como vimos anteriormente, a cada uno de los consumidores le cobraría un precio unitario de $p = 10$, y el consumidor H compraría una cantidad de $q_H = 90$, y el consumidor L compraría una cantidad de $q_L = 70$. Para extraer todo el excedente del consumidor, el monopolista le cobraría al demandante H una tarifa $T_H = 4,050$ (igual al excedente del consumidor H que tendría de comprar 90 unidades a un precio de 10 cada una), mientras que al consumidor L le cobraría una tarifa de $T_L = 2,450$ (igual al excedente del comsumidor L que tendría de comprar 70 unidades a un precio de 10 cada una). Lo anterior se obtiene aplicando lo visto en la sección anterior, referente a la discriminación perfecta, o discriminación de primer grado.

No obstante, como mencionamos al inicio, el supuesto actual es que el monopolista no puede distinguir fácilmente si un consumidor es de tipo H o de tipo L, por lo que si bien sabe que debe cobrar 10 por unidad, no sabría si a un consumidor le debería de cobrar la tarifa T_H o la tarifa T_L. Por lo tanto, ante este problema de selección adversa, necesitamos plantear un nuevo problema de maximización para el monopolista.

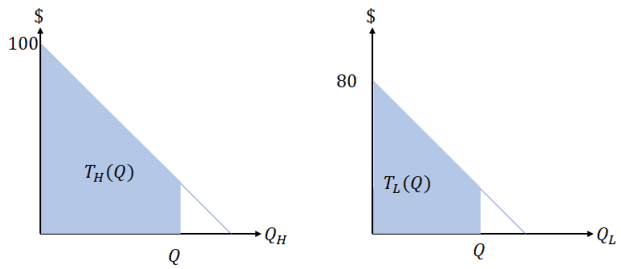
El monopolista ahora creará un paquete dirigido para los consumidores tipo H, consistente en una cantidad Q_H y una tarifa T_H por toda la cantidad. Asimismo, creará un paquete dirigido para los consumidores tipo L, consistente en una cantidad Q_L y en una tarifa T_L por toda esta cantidad. A esta oferta de dos paquetes la nombramos un menú, siendo el menú: $[(Q_H, T_H); (Q_L, T_L)]$. La pregunta obligada siguiente es, ¿cuál es lo máximo que cada tipo de consumidor está dispuesto a pagar por consumir una cantidad Q_i unidades? La respuesta es sencilla: el área bajo la curva de demanda, entre 0 y Q_i unidades (el excedente *bruto* del consumidor, a diferencia del excedente *neto* al que se le resta el precio y demás tarifas. Ahora, gráficamente, dicho excedente bruto se ve de la siguiente manera:

Este excedente bruto en función de Q_i lo podemos obtener como la integral de 0 a Q_i de la función inversa de la demanda:

$$T_H(Q) = \int_0^Q (100 - X)dX = 100Q - \frac{Q}{2}$$

$$T_L(Q) = \int_0^Q (80 - X)dX = 80Q - \frac{Q}{2}$$

Gráfica 8



Adicionalmente, el monopolista tendrá que incluir en su función de beneficios, los costos de vender dichas unidades a los consumidores. Vamos a plantear un primer problema de maximización para el productor, aunque este planteamiento tendrá algunas fallas como veremos más adelante.

$$\max_{Q_H,Q_L} \quad T_H(Q_H) + T_L(Q_L) - 10(Q_H + Q_L)$$

$$s.t. \quad W_H(Q_H) - T_H(Q_H) \geq 0$$
$$W_L(Q_L) - T_L(Q_L) \geq 0$$

Las dos restricciones que añadimos al problema de maximización las denotamos como condiciones de *racionalidad individual*. Esto quiere decir que el monopolista sabe que el beneficio neto de los consumidores (igual al beneficio bruto menos la tarifa que pagan) tiene que ser mayor o igual a cero, para que estos estén dispuestos a comprar. Es decir, los consumidores, que son individualmente racionales, tienen que estar mejor o igual comprando el volumen producto del monopolista a la tarifa del menú fijada, que no comprando nada.

Resolviendo el problema anterior podemos rápidadmente encontrar que en el óptimo, el monopolista ofrecerá un paquete dirigido a H consistente en $Q_H = 90$ unidades, a un precio del menú de $T_H = 4,950$. Asimismo, ofrecerá un paquete dirigido al consumidor tipo L consistente en $Q_L = 70$ unidades, por un precio de menú de $T_L = 3,150$. Los beneficios del monpolista serían igual a la suma de las tarifas, menos 10 por la cantidad total de unidades vendidas. Esto es, los beneficios serían iguales a $\pi = 6,500$

Notemos que estas cantidades son las de monopolio de discriminación en primer grado. No sólo eso, sino que las tarifas que se cobran por paquete son iguales al monto total que el monopolista discriminador de primer grado extrae de cada tipo de consumidor. Esto es, para el consumidor H, el monopolista discriminador en segundo grado cobra un total de $4,950$ por un total de 90 unidades. Por su parte, el monopolista discriminador en primer grado, por las mismas unidades, cobra una tarifa fija de $4,050$, más un precio unitario de 10 por 90 unidades, es decir, 900 adicionales. Esto quiere decir que en total cobra $4,950$. Análogamente, el monopolista discriminador en segundo grado cobra un total de $3,150$ por un total de 70 unidades, mientras que el monopolista discriminador en primer grado, por las mismas unidades, cobra una tarifa fija de $2,450$, más 10 por cada una de las 70 unidades vendidas, para un total de $3,150$. ¿Lo anterior quiere decir que la discriminación de segundo grado permite los mismos resultados que la discriminación en primer grado? Como anticipamos, ésta era una primera aproximación al problema del monopolista discriminador en segundo grado, mismo que tiene algunas fallas. Ahora veremos por qué.

Si bien el paquete $[Q_H, T_H]$ está dirigido al consumidor H, y el paquete $[Q_L, T_l]$ está dirigido al consumidor L, como mencionamos al inicio, el monopolista no puede distinguir frente a qué tipo de consumidor está, por lo que un consumidor tipo H podría comprar el paquete diseñado para L, o viceversa, y el monopolista no se daría cuenta. ¿A algún consumidor le convendría consumir un paquete diseñado para el otro tipo de consumidor?. Veremos eso.

Comencemos con el consumidor L. Cuando consume el paquete diseñado para él, notemos que tiene un beneficio total de $3,150$, y paga un monto igual, por lo que su utilidad neta es de cero. Por su parte, si

consume el paquete diseñado para H, su utilidad sería de:

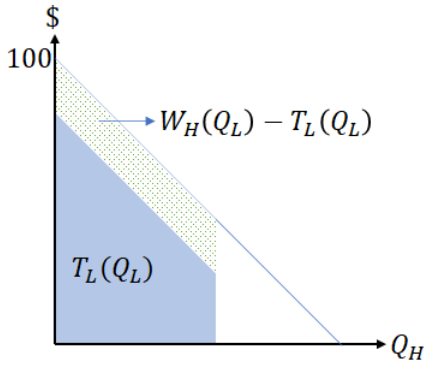
$$W_L(Q_H) - T_H = 80(90) - \frac{90^2}{2} - 4950 = -1800$$

Lo anterior quiere decir que si bien el consumidor L tiene un beneficio neto de cero si compra el paquete diseñado para él (y asumimos que lo compra, porque no está perdiendo nada), si decide comprar el paquete diseñado para H tendría pérdidas, por lo que se mantendría comprando el paquete diseñado para L.

Ahora veamos lo que pasa con el consumidor tipo H. Notamos que si compra el paquete diseñado para él, tiene un beneficio bruto de $4,950$, pero paga una tarifa de $4,950$, por lo que finalmente tiene un beneficio neto igual a 0. No obstante, éste podría optar por consumir el paquete diseñado para L, en cuyo caso su utilidad estaría dado por el beneficio bruto de consumur Q_L, menos la tarifa que pagaría, T_L, en cuyo caso, sus beneficios serían de:

$$W_H(Q_L) - T_L = 100(70) - \frac{70^2}{2} - 3150 = 1400$$

Gráfica 9



Esto quiere decir que si el consumidor tipo H miente, y se hace pasar por un consumidor tipo L, tendría un beneficio de $1,400$, por encima del beneficio de 0 de consumir el paquete diseñado para él, y así aumentaría su utilidad. Por lo tanto, un consumidor H racional se haría pasar por un consumidor L, y aumentar su utilidad. A esto se le denomina como *arbitraje personal*.

En este sentido, el monopolista en lugar de vender un paquete tipo H y un paquete tipo L, vendería dos paquetes tipo L, y cobraría las respectivas tarifas, e incurriría en los respectivos costos, por lo que sus beneficios serían de:

$$\pi = 3150 + 3150 - 10(70 + 70) = 4900$$

Esto es, sus beneficios en lugar de ser $6,500$ como pensábamos, en realidad serían de $4,900$. Necesitamos entonces plantear un nuevo problema de maximización, en el cual nos aseguremos que cada consumidor elija el paquete de cantidad-tarifa diseñado para cada uno de éstos. Esto se logra añadiendo una restricción adicional al problema de maximización que señale que cada consumidor esté mejor consumiendo el paquete diseñado para él, que mintiendo y consumiendo el paquete diseñado para el otro consumidor. Así, el problema de maximización del monpolista queda de la siguiente manera:

$$\max_{Q_H, Q_L} \quad T_H + T_L - 10(Q_H + Q_L)$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & W_H(Q_H) - T_H \geq 0 \\
& W_L(Q_L) - T_L \geq 0 \\
& W_H(Q_H) - T_H \geq W_H(Q_L) - T_L \\
& W_L(Q_L) - T_L \geq W_L(Q_H) - T_H
\end{aligned}
$$

Notamos que este problema se parece mucho al anterior, con la excepción de que incluye dos restricciones adicionales. La primera nos dice que el beneficio neto del consumidor tipo H consumiendo el paquete diseñado para él, y pagando su respectivo precio, tiene que ser mayor al beneficio neto del mismo consumidor de optar por consumir el paquete diseñado para L, y pagar la tarifa respectiva. La segunda nueva restricción nos dice, análogamente, que el consumidor L tiene que estar mejor consumiendo el paquete diseñado para éste, que consumiendo el paquete diseñado para H. A este tipo de restricciones se les conoce como restricciones de *compatiblidad de incentivos*. [11] Ahora bien, estas restricciones pueden ser simplificadas, porque algunas de ellas no van a estar activas, por lo que se pueden eliminar, para simplificar el álgebra. Veamos:

En primer lugar, tomemos la restricción de racionalidad individual del demandante bajo L y la restricción de compatibilidad de incentivos del demandante alto H:

$$W_L(Q_L) - T_L \geq 0$$

$$W_H(Q_H) - T_H \geq W_H(Q_L) - T_L$$

Como la primera desigualdad es no negativa, la podemos sumar del lado izquierdo de la segunda desigualdad, y seguiría siendo mayor al lado derecho de ésta:

$$W_H(Q_H) + W_L(Q_L) - T_H - T_L \geq W_H(Q_L) - T_L$$

Simplificando la desigualdad anterior, y despejando algunos términos, tenemos que:

$$W_H(Q_H) - T_H \geq W_H(Q_L) - W_L(Q_L) > 0$$

Sabemos que $W_H(Q_L) - W_L(Q_L)$ es mayor a cero por la manera en que definimos las funciones. Anteriormente habíamos dicho que la demanda H era "grande" y la demanda L era "chica", significando que para una misma Q, H estaría dispuesto a pagar más que L, lo cual implica que $W_H(Q_L) > W_L(Q_L)$. Despejando estos términos, nos queda que $W_H(Q_L) - W_L(W_L) > 0$. Lo anterior, por transitividad, implica que:

$$W_H(Q_H) - T_H > 0$$

En otras palabras, la racionalidad individual del consumidor chico L, y la compatibilidad de incentivos del consumidor grande H implican automáticamente la racionalidad individual del consumidor grande H, misma que se cumple con estricta desigualdad. Ya que dicha condición resulta no vinculante como consecuencia de las otras dos, podemos omitirla del problema de maximización.

Lo sigiente es demostrar que la condición de racionalidad individual de L es vinculante, por lo que se cumple con igualdad. Esto es sencillo. Primero, si suponemos que $Q_L = 0$, notamos que la desigualdad dice que el precio es no positivo. Dado que hay una suposición de que el precio es no negativo, la única

[11] Si bien no nos vamos a meter en el tema en la presente nota, las restricciones de racionalidad individual y de compatibilidad de incentivos son fundamentales para resolver los problemas con información asimétrica, como en este caso, el problema de selección adversa (siendo el otro problema de información más estudiado el de riesgo moral). Los problemas de selección adversa y de riesgo moral son el nucleo de la Teoría de Contratos (diseño de contratos óptimos en relaciones de agente principal, como puede ser el de un gerente y su empleado, entre otros problemas de información asimétrica). Asimismo, estas restricciones son fundamentales en otra área de la economía conocida como "Diseño de Mecanismos" y "Diseño de Mercados", en donde el establecimiento de las reglas del mercado que consideren estas dos restricciones de manera óptima, determinarán el éxito o fracaso del mercado diseñado. En este punto en particular, es interesante seguir el trabajo del Premio Nobel, Alvin E. Roth.

solución es que el precio sea igual a cero, lo cual demuestra que la condición de racionalidad individual para L se cumple con igualdad. Ahora, supondremos que Q_L es positivo. Por contradicción supondremos que un menú óptimo para el monopolista satisface:

$$W_L(Q_L) - T_L > 0$$

Supondremos que tanto a T_L como a T_H los subimos ligeramente en ϵ, sin alterar la cantidad de los respectivos paquetes, de tal suerte que:

$$W_i(Q_i) - T_i - \epsilon \geq 0,\ i \in \{L, H\}$$

De lo anterior, notamos que estos nuevos paquetes siguen satisfaciendo las condiciones de racionalidad individual, ya que en ningún momento se vuelven menores a cero (considerando que la racionalidad individual de H era estrictamente positiva). Asimismo, este nuevo menú continúa satisfaciendo las condiciones de racionalidad individual, ya que ϵ se resta de ambos lados, por lo que su efecto se cancela. Estas nuevas tarifas más elevadas siguen satisfaciendo las restricciones impuestas, y elevan los beneficios del monopolista por sobre los beneficios de lo que supusimos era el "menú óptimo". Por contradicción, entonces, la restricción de racionalidad individual de L se tiene que satisfacer con estricta desigualdad.

El siguiente truco es suponer que la restricción de compatibilidad de incentivos para L es no vinculante, y resolver el problema ignorando ésta, y al final verificar que efectivamente no se viole la condición de compatibilidad de incentivos de L. Suponer que la compatibilidad de incentivos de L es no vinculante implica que la restricción de compatibilidad de incentivos de H es vinculante, y se satisface con igualdad estricta. De lo contrario, el monopolista podría incrementar T_H, incrementando sus ganancias, hasta que la restricción se satisfaga con igualdad. Así, de los párrafos anteriores nos queda que el problema de maximización del monopolista se reduce a:

$$\max_{Q_H, Q_L} \quad T_H + T_L - 10(Q_H + Q_L)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & W_L(Q_L) - T_L = 0 \\ & W_H(Q_H) - T_H = W_H(Q_L) - T_L \end{aligned}$$

Resolviendo este problema obtenemos que el menú óptimo que puede ofrecer el monopolista es:

$$[(Q_H = 90, T_H = 3,950); (Q_L = 50, T_L = 2,750)]$$

Bajo este menú, los beneficios del monopolista están dados por:

$$\pi = 3950 + 2750 - 10(90 + 50) = 5300$$

Se deja al lector verificar que, como asumimos en nuestro "último truco", la compatibilidad de incentivos de L es no vinculante, y que la compatibilidad de incentivos de H se cumple con igualdad.

Notamos que estos beneficios son menores a los $6,500$ que resultaban de discriminar de manera perfecta y extraer todo el excedente del consumidor de ambos consumidores. No obstante, no podíamos hacer esto, porque el consumidor H siempre mentía y se hacía pasar por un consumidor tipo L. Bajo estos "incentivos a mentir" por parte del consumidor H, en realidad los beneficios del monopolista se reducían a $4,900$. Por lo tanto, hacer este tipo de *screening* que resulta de la discriminación de segundo grado, le otorgan mayores beneficios al monopolista.

Ahora, veamos qué sucede. Notemos que bajo estas nuevas condiciones, como vimos antes, la restricción de racionalidad individual de L se satisface con igualdad. Podemos sustituir Q_L en $W_L(Q_L)$, restarle T_L y ver que el beneficio de L es igual a 0. No obstante, la restricción de racionalidad individual para H es

estrictamente mayor que 0. Si sustituimos los valores óptimos, obtendremos que $W_H(Q_H) - T_H = 1,000$. A este monto le denominamos "renta de información", y puede interpretarse como "el precio que el monopolista tiene que pagar, para suplir su asimetría de información". En economía, la información es valiosa, y, generalmente, cuesta. [12]

Es importante señalar que en el ejemplo anterior, el monopolista decide atender a dos consumidores. No obstante, es posible que el mismo monopolista desee optar por atender sólo al consumidor "grande". Esto puede ocurrir si i) el consumidor grande tiene una demanda mucho mayor que el consumidor chico, o ii) si hay un número mayor de consumidores grandes. De igual manera, en el ejemplo anterior supusimos un único consumidor grande y un único consumidor pequeño (mitad y mitad). En caso de que esta proporción sea distinta, los resultados igual serían distintos.

Como conclusión a lo anterior, tenemos que a falta de información por parte del monopolista, y ante la dificultad de allegarse de la misma por medios directos, éste tiene que hacer uso de medios de *screening* para que los consumidores se autoseleccionen al paquete que más les conviene. Este tipo de mecanismos de *screening* no son utilizados únicamente en la discriminación de segundo grado, sino que son ampliamente utilizados en la diferenciación de productos para que los consumidores se autoseleccionen al producto que más les conviene, para así poderles cobrar más y extraer una mayor parte de su excedente de consumidor. Un ejemplo de esto se puede ver en la cadena *Starbucks* cuyo modelo de negocio se basa mucho en tener un menú (una palabra muy importante para la discriminación de segundo grado) muy variado de productos a precios distintos, tal que cada producto se adecua tan perfectamente a las preferencias de cada tipo de consumidor, que puede cobrar un alto precio por el mismo.

5 Discriminación de tercer grado

A diferencia de la discriminación de segundo grado, donde los monopolistas no saben quién valúa más el bien, en este caso, los monopolistas saben que hay varios tipos de individuos claramente identificables: hombres de mujeres, estudiantes de no estudiantes, jóvenes de adultos mayores, nacionales de extranjeros, etcétera. Estas distinciones las puede usar a su favor. En el caso del antro, el monopolista sabe que los hombres están dispuestos a pagar más por entrada que las mujeres, los autobuses foráneos saben que los estudiantes están dispuestos a pagar menos que los hombres de negocio, etcétera. Lo que no saben los monopolistas es la valuación exacta del bien, por lo que no pueden extraer excedente. O en caso de que la sepan, el gobierno no permite el cobro de una tarifa de entrada (de un cover, por ejemplo). No obstante, el monopolista puede, tanto por su información como por la ausencia de prohibiciones, poner un precio distinto a cada bien.

De esta manera, la empresa sólo puede obtener beneficios por la venta unitaria de bienes con precios diferenciados, y no por el cobro de una tarifa. En este sentido, eliminamos el elemento de las tarifas de la función de beneficios de nuestra súper empresa, de tal manera que el problema de maximización de la empresa se ve de la forma (enfatizamos de nuevo el problema de separar el problema por los costos agregados):

$$\max_{\{p_i\}_{i=1}^n} \sum_{i=1}^{n} q_i(p_i)p_i - CT(Q)$$

En donde

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i(p_i)$$

De las condiciones de primer orden, derivando respecto a p_i tenemos que:

[12] Tan valiosa es la información, que diversas compañías pagan millones de dólares para allegarse de la misa. Los individuos proveen esta información a compañías como Google, Facebook, Amazon, entre otras empreas. Esta información sirve como insumo para ofrecer nuevos productos, ofertar publicidad o propaganda política, entre otras funciones. Al respecto, es recomendable el libro "Weapons of Math Destruction" por Cathy O'Neil.

$$\frac{dq_i}{dp_i}p_i + q_i(p_i) = \frac{dCT}{dQ}\frac{\partial Q}{\partial q_i}\frac{dq_i}{p_i}$$

La intuición siempre es la misma: la empresa iguala el costo marginal de producción a lo que percibe es su ingreso marginal de vender. Regresemos a la expresión anterior. Ya sabemos que la derivada de la cantidad agregada es igual a uno, por lo que despejando términos y agrupando obtenemos que:

$$\frac{dq_i}{dp_i}\left[p_i - Cmg\right] = -q_i(p_i)$$

Y multiplicando ambos lados de la ecuación por p_i y dividiendo entre $q_i(p_i)$ tenemos que:

$$\epsilon_{q_i}\left[p_i - Cmg\right] = -p_i$$

Despejando términos, obtenemos que:

$$\frac{p_i - Cmg}{p_i} = -\frac{1}{\epsilon_{q_i}}$$

Esto significa que, para cada segmento de la demanda, el monopolista cumplirá la regla de la elasticidad inversa, al costo marginal de producción del total de unidades.

La solución del problema es sencilla. Recordemos el problema de maximización.

$$\max_{\{p_i\}_{i=1}^n} \sum_{i=1}^{n} q_i(p_i)p_i - CT(Q)$$

De aquí notamos que existen n condiciones de primer orden, es decir, derivamos respecto a cada uno de los precios. Esto nos da un total de n ecuaciones (una por cada condición de primer orden) con n variables (una por cada precio de cada segmento de la demanda). El sistema se resuelve como cualquier otro.

6 Listas de precios

En las secciones anteriores hemos analizado al monopolio simple (un consumidor, una empresa, no hay tarifas), para comprender el comportamiento del monopolio. Esto nos permitió pasar a un monopolio con más poder, al que llamamos la súper empresa, que se enfrenta a varios agentes heterogéneos, a los que conoce perfectamente, y a quienes puede cobrar la disposición total de pago. Posteriormente, pasamos a analizar el caso cuando el monopolio puede distinguir entre varios consumidores, pero no hay tarifas (lo cual parece un caso intermedio entre discriminación de primer grado y monopolio puro).

No obstante, es posible encontrar distintos tipos de colocación de precios, en los cuales se mezclen estas dos formas de discriminación. En los laboratorios abordaremos casos concretos, pero delinearemos aquí algunos de ellos. Para eso, partiremos de los beneficios de nuestra súper empresa:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} q_i(p_i)p_i + \sum_{i=1}^{n}\int_{p_i}^{\infty} q_i(x_i)dx_i - CT(Q)$$

Ahora bien, esta forma de colocar precios puede estar constreñida, ya sea por información de la empresa, o quizás algún tipo de regulación que limite la discriminación, por ejemplo, estipulando que el precio por unidad deba ser único, pero permitiendo diferencias en las tarifas. En adelante asumiremos simplemente que estas restricciones se deben a la regulación y pasaremos del problema de maximización de la súper empresa, al problema de maximización de la empresa restringida. En general, la regulación puede estipular, a modo de ejemplo:

- Sin restricciones, es decir, la empresa puede poner precios diferenciados y tarifas diferenciadas (discriminación de primer grado).

- La empresa debe poner precios iguales, pero puede poner tarifas diferenciadas.
- La empresa puede poner precios diferenciados, pero debe poner la misma tarifa.
- La empresa debe poner precios iguales y tarifas iguales.
- La empresa puede poner precios diferenciados, pero no puede poner tarifa (discriminación de tercer grado).
- La empresa tiene que poner el mismo precio y no puede poner tarifa (monopolio puro frente a una demanda agregada[13]).

En varios de los supuestos, un problema de maximización no nos basta. Esto se da, ya que las regulaciones de precios iguales o de tarifas iguales pueden ocasionar que las empresas tengan que decidir entre atender a todos los consumidores (con precios o tarifas bajas), aunque quizás les convenga subir el precio, que caiga la cantidad intercambiada, pero compensar por poner una tarifa más alta, esto es, la misma tarifa para todos, pero que sólo algunos estén dispuestos a pagarla, por lo que de hecho se excluye a los consumidores "pequeños". Esta comparación es discreta, por lo que habrá que plantear varios problemas de la empresa. Cuando tratamos a demandas lineales, hemos visto que se define por partes, tendremos que hacer varios casos, no porque el problema en sí lo exija, sino porque la forma funcional nos restringe. Adicional a los casos que ya analizamos, estamos entonces frente a tres casos nuevos, al menos.

A continuación se dará una breve descripción de lo que se hará en cada planteamiento. La forma en la que pasaremos a describir estos casos es meramente descriptivo de lo que ocurre (no vamos a derivar), por lo que se recomienda que los lectores no pasen mucho tiempo en ellos. En el laboratorio se procederá a hacer ejercicios concretos, lo cual ayudará a aterrizar los ejemplos siguientes.

6.1 Tarifas distintas, mismo precio

Este caso es muy sencillo, ya que no tenemos que partir el problema en varios supuestos. Los beneficios de la empresa se ven de la siguiente forma:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} q_i(p)p + \sum_{i=1}^{n} \int_p^{\infty} q_i(x)dx - CT(Q)$$

Como notamos, la empresa ahora puede elegir un solo precio en lugar de varios, por lo que habrá una condición de primer orden únicamente. No obstante, el precio se tiene que sustituir en cada demanda en lo particular.

Para el caso de que las demandas sean continuas y estén definidas para precios hasta infinito, por ejemplo, de la forma $p_i = \frac{1}{q_i^{\eta}}$, maximizar la expresión anterior nos dará una pronta respuesta, ya que, sin importar el precio que se fije, todos los demandantes decidirán consumir. No obstante, para el caso de que las demandas sean lineales (o en general, para el caso de que haya un precio de entrada), si el precio que da el problema es muy alto, hay consumidores que decidan retirarse. Matemáticamente, maximizar la expresión anterior nos puede decir que determinados consumidores comprarán una cantidad negativa y se les cobrará una tarifa negativa. Asimismo, esta cantidad negativa será descontada de la cantidad total para efectos de calcular los costos totales. Esto suena completamente ilógico. Por eso, en este supuesto, habrá que hacer varios casos, en unos atendiendo a todos los consumidores, y otro caso en el que se atienda únicamente a los consumidores por arriba de determinado umbral de precios (por arriba del precio de entrada del consumidor "pequeño").

[13] Como es el mismo precio, sí podemos hablar de una demanda agregada.

6.2 Precios distintos, misma tarifa

Este caso tiene más complicaciones que el caso anterior. Si bien el precio es una variable para decidir cuánto consumir, para los compradores la tarifa impone una decisión entre consumir lo que sea al precio establecido, o no consumir nada (establece una condición discreta). Entonces, para resolver la maximización, tenemos que hacer varios planteamientos de problema de maximización dependiendo de si atenderá a todos los consumidores (y establecerá la tarifa pequeña), o sólo a algunas (fijará una tarifa lo suficientemente elevada que deje de fuera a algunos consumidores). Independientemente, los beneficios de la empresa se verán de la siguiente manera:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n_j} q_i(p_i)p_i + n_j \int_{p_j}^{\infty} q_j(x_j)dx_j - CT(Q_j)$$

Analicemos la expresión anterior. Notamos que ahora aparecen varios subíndices j. Esto determina cada caso concreto que haremos. Digamos que j es el consumidor más pequeño que estamos dispuestos a considerar en cada problema (de los varios que vamos a hacer). Llamamos un consumidor pequeño a aquel que a cada nivel de precios, está dispuesto a pagar una tarifa menor que la de los demás individuos. Así, si determinamos que j es el consumidor más pequeño a considerar, tenemos que excluir del problema a todos los consumidores que son más pequeños que j. Diremos que los consumidores que sobreviven a la tarifa son n_j (de ahí que la sumatoria sólo sume n_j individuos.

Ahora, la tarifa que podremos cobrar será aquella dispuesta a ser pagada por el consumidor pequeño j, la cual está dada por

$$\int_{p_j}^{\infty} q_j(x_j)dx_j$$

Por la manera en que definimos al consumidor pequeño, sabemos que todos los demás consumidores "grandes" estarán dispuestos a pagar dicha tarifa pues aún tendrían un excedente. Como esta tarifa se la cobramos a todos los individuos que sobreviven a la cota del consumidor pequeño j, la multiplicamos por esta cantidad de sobrevivientes, n_j

Finalmente, el último término nos dice que restemos los costos totales, de producir Q_j, en donde ésta es la suma de todas las cantidades demandadas por los n_j consumidores que sobrevivieron la cota del consumidor pequeño j.

En el problema de maximización, en la expresión anterior debemos elejir p_i, pero se aplicará el precio del consumidor pequeño para efectos de encontrar la tarifa. El problema lo hacemos para distintas cotas del consumidor pequeño. Al final comparamos qué beneficios son mayores (quizás atender a 1 consumidor sea óptimo, quizás a 2, o quizás a los n individuos sea lo óptimo). La manera de elegir la cota de precio del consumidor pequeño dependerá del problema concreto, por lo cual se tienen los laboratorios. Al igual que en la subsección anterior, de tarifas distintas pero mismos precios, hay que considerar que las demandas lineales pueden dar cantidades negativas.

6.3 Tarifas y precios iguales

Este caso es una mezcla de las restricciones de los dos casos anteriores. Los beneficios del productor se ven:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n_j} q_i(p)p + n_j \int_{p}^{\infty} q_j(x)dx - CT(Q_j)$$

De igual manera, se tiene una cota de precio definida a partir del consumidor pequeño. La forma de proceder es similar a la del caso anterior, de precios distintos y tarifas iguales. No obstante, aquí el precio será el mismo para todos. Cabe resaltar que las expresiones de las subsecciones anteriores son maneras de ver los beneficios, y no planteamientos de maximización concretos. Estos los haremos caso por caso para

encontrar precios óptimos. El planteamiento del problema es más sencillo con ejemplos concretos de los laboratorios.

7 Ejemplo de monopolio

Para ejemplificar los casos anteriores vamos a tomar un ejemplo del laboratorio y lo vamos a resolver con varios niveles de discriminación y regulación. Recordemos que en general el gobierno puede controlar precios, por lo que plantearemos los problemas para maximizar precios en lugar de cantidades. La estructura es la siguiente:

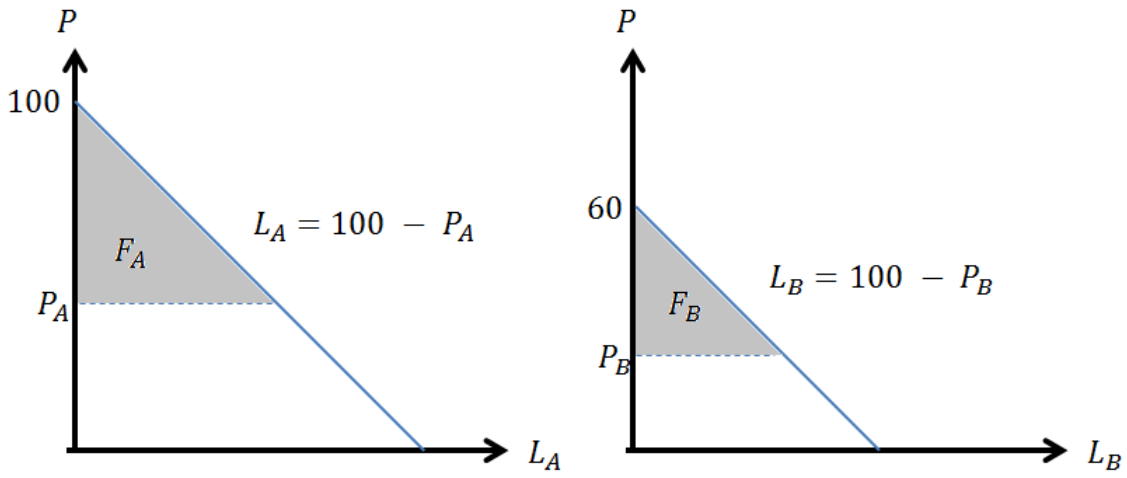
Existe una empresa que produce el bien L con una función de costos $CT = \frac{1}{2}L^2$. Asimismo, existen Dos segmentos de la demanda A y B, cada uno con una función de demanda dada por:

$$L_A = 100 - P_A$$

$$L_B = 60 - P_B$$

En donde $L_A + L_B = L$. Recordemos que todo va a estar elevado al cuadrado al meterlo a la función de costos. Gráficamente, las demandas se ven así:

Gráfica 7



La parte sombreada muestra la tarifa máxima que el monopolista puede cobrar a cada segmento de la demanda cuando cobra los precios P_A y P_B, respectivamente, y que equivale al excedente del consumidor para cada segumento. Como vemos, la base del triángulo es $L_A = 100 - P_A$ y $L_B = 60 - P_B$, respectivamente, y que depende del precio que cobre el individuo. Por su parte, la altura del tríangulo está dada por $100 - P_A$ y $60 - P_B$, según el caso. Así, podemos obtener esta tarifa dependiente del precio como:

$$F_A = \frac{1}{2}(L_A)(100 - P_A) = \frac{1}{2}(100 - P_A)(100 - P_A) = \frac{(100 - P_A)^2}{2}$$

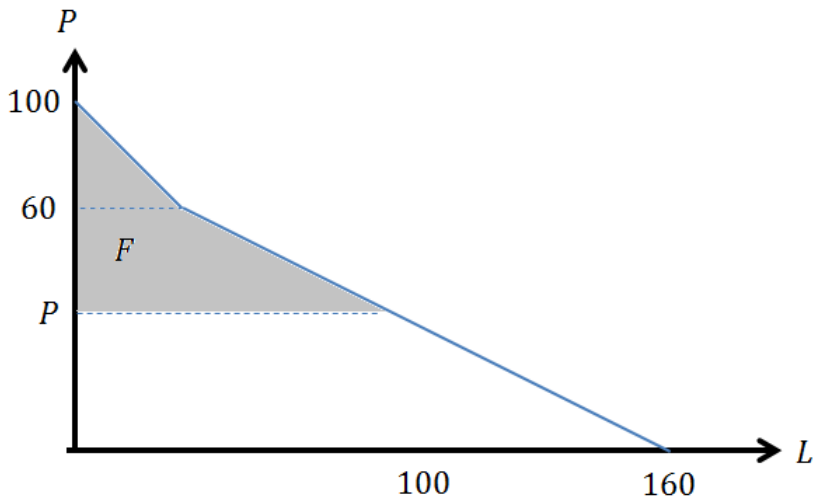
$$F_B = \frac{1}{2}(L_B)(60 - P_B) = \frac{1}{2}(60 - P_B)(60 - P_B) = \frac{(60 - P_B)^2}{2}$$

Como ya dijimos, las tarifas dependen de los precios y las podemos insertar en el problema de maximización de la empresa. Antes de continuar, veremos cómo se comporta la demanda agregada. Como ya habíamos dicho anteriormente, ésta se da por partes y debería quedar de la forma:

$$L = \begin{cases} 0 & si \quad P > 100 \\ 100 - P & si \quad 60 < p \leq 100 \\ 160 - 2p & si \quad 0 < p \leq 60 \\ 160 & si \quad p \leq 0 \end{cases}$$

Aquí no cabe hacer la distinción con los subíndices dependiendo de si se trata de la demanda A o la demanda B porque estamos tratando con la demanda agregada, lo cual requiere que sea el mismo precio para todos los individuos. Gráficamente, ésta se ve de la forma:

Gráfica 8



Se puede demostrar geográficamente que el área sombreada corresponde a la suma de las tarifas que le cobran a cada individuo al precio P. Ahora bien, pasemos al problema.

7.1 Discriminación de primer grado

En este apartado, no tenemos ninguna restricción, por lo que podemos cobrar cualquier precio. Los beneficios de la empresa están dados por ingresos por ventas, ingresos por tarifas menos los costos, en donde a cada individuo le puede cobrar cualquier precio. Los beneficios tienen la forma:

$$\Pi = P_A L_A + P_B L_B + F_A + F_B - \frac{1}{2}(L_A + L_B)^2$$

Sustituyendo las funciones de demandas respectivas y las funciones de tarifas máximas:

$$\Pi = P_A(100 - P_A) + P_B(60 - P_B) + \frac{(100 - P_A)^2}{2} + \frac{(60 - P_B)^2}{2} - \frac{1}{2}(160 - P_A - P_B)^2$$

Podemos elegir ambos precios, por lo que de las condiciones de primer orden nos queda:

$$\begin{aligned} P_A: \quad & (100 - P_A) - P_A - (100 - P_A) = -(160 - P_A - P_B) \\ P_B: \quad & (60 - P_B) - P_B - (60 - P_B) = -(160 - P_A - P_B) \end{aligned}$$

Del sistema deecuaciones anterior es fácil dar con el resultado $P_A = P_B = \frac{160}{3}$. Que los precios fueran iguales ya lo sabíamos de la demostración anterior de discriminación de primer grado. No vamos a representar esto gráficamente (se parece mucho a la gráfica 8, de hecho), sólo a comparar que el costo marginal y el precio son iguales. Sustituyendo el precio en las funciones de demanda nos arroja que $L_A = 140/3$ y $L_B = 20/3$, por lo que $L = 160/3$. Considerando que el costo marginal de la empresa es $CMg = L$, nos arroja que efectivamente el precio es igual al costo marginal de producción. Pasemos a ver qué ocurre en discriminación de tercer grado.

7.2 Discriminación de tercer grado

Ahora las empresas pueden seguir cobrando precios distintos, pero no pueden cobrar tarifas. Eliminamos entonces la parte de tarifas de los beneficios de la empresa, por lo que se ven de la siguiente forma:

$$\Pi = P_A L_A + P_B L_B - \frac{1}{2}(L_A + L_B)^2$$

Sustituyendo las funciones de demandas respectivas:

$$\Pi = P_A(100 - P_A) + P_B(60 - P_B) - \frac{1}{2}(160 - P_A - P_B)^2$$

Podemos elegir ambos precios, por lo que de las condiciones de primer orden nos queda:

$$\begin{aligned} P_A: &\quad (100 - P_A) - P_A = -(160 - P_A - P_B) \\ P_B: &\quad (60 - P_B) - P_B = -(160 - P_A - P_B) \end{aligned}$$

Resolver este sistema de ecuaciones no es complicado. Al final nos va a quedar de resultado que $P_A = 70$ y $P_B = 50$. Entonces, las cantidades están dadas por $L_A = 30$ y $L_B = 10$. Como hemos visto, pasar de discriminación de primer grado a la de tercer grado es fácil, y sólo necesitamos ir eliminando términos de los beneficios de la "súper empresa".

7.3 Monopolio puro

Antes de pasar a la parte de regulación, resolveremos el monopolio puro. Recordemos que este monopolio no puede cobrar tarifa (como en discriminación de tercer grado) pero tampoco puede poner precios distintos (ya sea porque no puede distinguir a cada segmento de la demanda o porque el Estado se lo exige). [14] Los beneficios de la empresa entonces se ven cómo:

$$\Pi = PL_A + PL_B - \frac{1}{2}(L_A + L_B)^2$$

Eliminamos los subíndices del precio, porque estos serán iguales, pero eso no quita que las demandas sigan siendo distintas. Considerando que $L_A + L_B = L$ como la definimos anteriormente (con los corchetes y por rango), los beneficios se pueden poner como:

$$\Pi = P(L_A + L_B) - \frac{1}{2}(L_A + L_B)^2 = PL - \frac{1}{2}L$$

Podríamos sustituir la demanda agregada, pero ésta está dada por partes. A grandes rasgos tendremos únicamente dos casos: $60 < P \leq 100$ y $0 < O \leq 60$. Si el precio es más alto que 100, nadie consumirá y el monopolista no tendrá beneficios. Si el precio es cero o inferior, bueno... tampoco aplica. Entonces, tenemos que solucionar los dos casos.[15] Empecemos por el precio arriba de 60.

Caso 1: $60 < P \leq 100$

Los beneficios están dados por:

$$\Pi = P(100 - P) - \frac{1}{2}(100 - P)^2$$

[14] Técnicamente podemos interpretar que el monopolista maximiza los súper beneficios sujeto a la restricción de que las tarifas son 0 y que los precios tienen que ser iguales. Si sustituimos estas restricciones dentro de los beneficios, da lo mismo que eliminar el subíndice en los precios.

[15] La razón por la que hacemos dos casos es que cuando realizamos el problema de maximización por derivar e igualar a cero, éste método requiere que la demanda sea continua y suave. El que que tengamos brincos o quiebres en que la forma funcional de la demanda no puede ser incluido dentro del procedimiento de maximización por derivadas. Hay que recordar que éste procedimiento lo que hace es encontrar puntos críticos en demandas suaves y continuas, tales como máximos y mínimos, pero ignora otros puntos críticos de las funciones como son saltos o cambios en la forma funcional a partir de determinado argumento. Asimismo, ignora que un argumento que maximiza determinada forma funcional puede estar fuera del rango en que la función toma dicha forma funcional. De aquí la necesidad de partir por casos el problema. En el laboratorio puedo ahondar más en el tema, pero no es objeto de la presente nota.

De las condiciones de primer orden obtenemos que:

$$100 - 2P = -(100 - P)$$

De aquí obtenemos que el precio óptimo del monopolio es $P = 200/3$. Este precio es efectivamente mayor a 60 por lo que no hay contradicción. Entonces, los beneficios de la empresa serían: $15,000/9$.

Caso 2: $0 < P \leq 60$
Los beneficios están dados por:

$$\Pi = P(160 - 2P) - \frac{1}{2}(160 - 2P)^2$$

De las condiciones de primer orden obtenemos que:

$$160 - 4P = -2(160 - 2P)$$

De aquí obtenemos que el precio óptimo del monopolio es $P = 20$. Este precio es efectivamente menor a 60 por lo que no hay contradicción. Entonces, los beneficios de la empresa serían: $1,600$.

Comparando
Ya que hicimos ambos casos, falta comparar beneficios entre ambos. Notamos que los beneficios del primer caso son mayores a los beneficios del segundo caso, por lo que el precio que maximiza los beneficios del monopolio es $P = 200/3$ y la cantidad vendida será $L = 100/3$.

7.4 Tarifas distintas, mismo precio

Ahora imaginemos el caso en el que el monopolio puede cobrar tarifas distintas pero precios iguales. Un ejemplo sería que el Estado así lo exija. Pero podemos imaginar un caso en el que esto se dé de manera natural, como en los antros. Aquí, el cover puede ser distinto para mujeres y hombres (como regularmente sucede), pero no tiene sentido cobrarle más cara cada copa, por ejemplo, a las mujeres, pues éstas podrían mandar a sus amigos/novios/weyes que se encontraron por la barra a comprar el trago por ellas a un menor precio. Entonces el monopolio aquí cobra tarifas distintas pero mismo precio por copa.

Para ver cómo se ven los beneficios, partamos de los beneficios de la "súper empresa" en el caso de discriminación de primer grado:

$$\Pi = P_A L_A + P_B L_B + F_A + F_B - \frac{1}{2}(L_A + L_B)^2$$

Aquí tenemos los elementos anteriormente descritos: hay ingreso por venta de cada copa, hay posibilidad de cobrar tarifas, pero el precio será el mismo. Entonces eliminamos el subíndice del precio, puesto que $P_A = P_B \equiv P$. Sabiendo que $L_A + L_B = L$ los beneficios entonces se ven de la siguiente forma:

$$\Pi = PL_A + PL_B + F_A + F_B - \frac{1}{2}L^2 = PL + F_A + F_B - \frac{1}{2}(L_A + L_B)^2$$

Ahora, como tenemos el mismo precio, enfrentamos a la demanda agregada, misma que está por partes. Al igual que en el monopolio puro, tendremos dos casos, uno para el precio mayor a 60 y otro para el precio menor a 60.

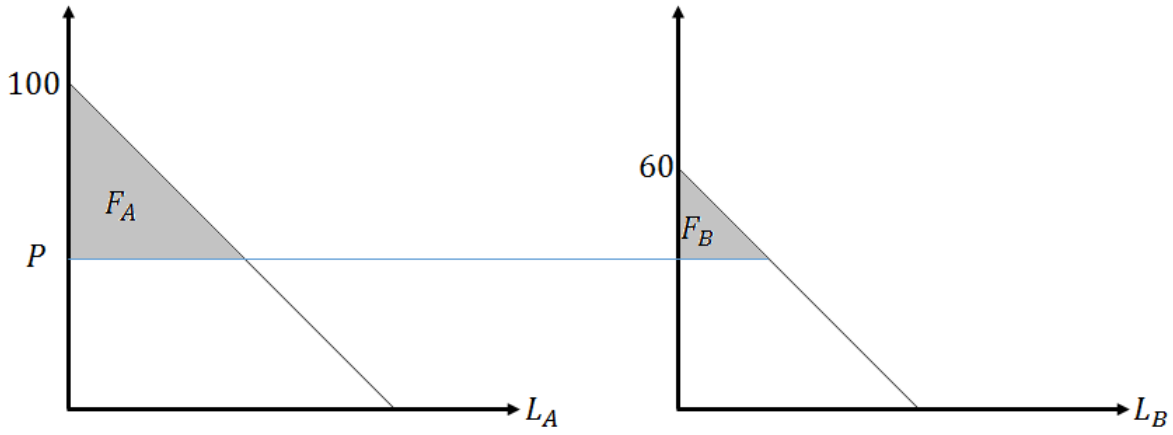
Francamente resolver este ejercicio no tiene mucho sentido. Del caso de discriminación de primer grado ya habíamos visto que si el monopolista puede cobrar tarifas distintas, de por sí va a cobrar el mismo precio a ambos individuos y será igual al costo marginal. Así, el precio que maximiza este caso será igual al de discriminación de primer grado, $P = 160/3$.

7.5 Misma tarifa, mismo precio

Este caso es un poco más recurrente. Por ejemplo, el caso del antro en el que el Gobierno prohibe todo tipo de discriminación, incluyendo las ofertas especiales a estudiantes o personas de la tercera edad. Otra forma de verlo es cuando el monopolio aunque sepa que hay dos segmentos de la demanda con comportamientos distintos, no los puede diferenciar al momento de realizar la venta. Sabiendo que los precios son iguales, sólo tenemos que saber a qué va a ser igual la tarifa. Si fijamos un precio muy bajo bajo tal que ambos consumidores (A y B quieran comprar), pero una tarifa muy elevada, puede que uno de los dos individuos no entre. Digamos, la copa en el antro está a \$20, pero el cover está en \$400. Cualquiera querrá pagar veinte pesos por una copa, pero no cualquiera querrá pagar cuatrocientos pesos de cover, aunque el copeo sea barato.

Para este caso en particular del mismo precio misma tarifa, $F_A = F_B \equiv F$, podemos ir a una visualización gráfica del asunto.

Gráfica 9



Notamos de la gráfica anterior que para cada nivel de precio tal que este precio sea el mismo para ambos individuos, el consumidor A estará dispuesto a pagar una mayor tarifa F que el individuo B. Entonces si al precio P fijamos la tarifa F_A, el individuo B no comprará, y el individuo A sí comprará. En cambio, si fijamos una tarifa F_B, al precio P, ambos individuos estarán dispuestos a comprar. Llamaré al individuo con mayor disponibilidad de pago de tarifa el individuo "grande", y al individuo con menor disponibilidad de pago de tarifa el individuo "pequeño".

Entonces el monopolio se enfrenta al problema de atender a ambos individuos y cobrar una tarifa baja, o atender sólo a un individuo pero cobrar una tarifa alta. Entonces tenemos que hacer ambos casos y comprar beneficios. Empecemos atendiendo únicamente al individuo con demanda alta.

Caso 1: Atendemos sólo al individuo "grande"

Los beneficios de la empresa son aquellos de venderle a A al precio P, y cobrarle su respectiva tarifa máxima F_A:

$$\Pi = P(100 - P) + \frac{(100 - P)^2}{2} - \frac{1}{2}(100 - P)^2$$

De las condiciones de primer orden y encontrando el precio óptimo obtenemos que éste es $P = 50$, por lo que los beneficios son $\Pi = 2,500$.

Caso 2: Atendemos a ambos individuos

En este caso, tendremos dos fuentes de ingreso: los ingresos por ventas a cada individuo al precio P, y los ingreso por cobrarle a ambos individuos la tarifa del individuo pequeño F_B evaluada en el precio P. Así, los beneficios se ven de la siguiente manera:

$$\Pi = PL_A + PL_B + 2F_B - \frac{1}{2}(L_A + L_B)^2$$

Sustituyendo términos y factorizando:

$$\Pi = P(160 - 2P) + (60 - P)^2 - \frac{1}{2}(160 - 2P)^2$$

De las condiciones de primer orden obtenemos:

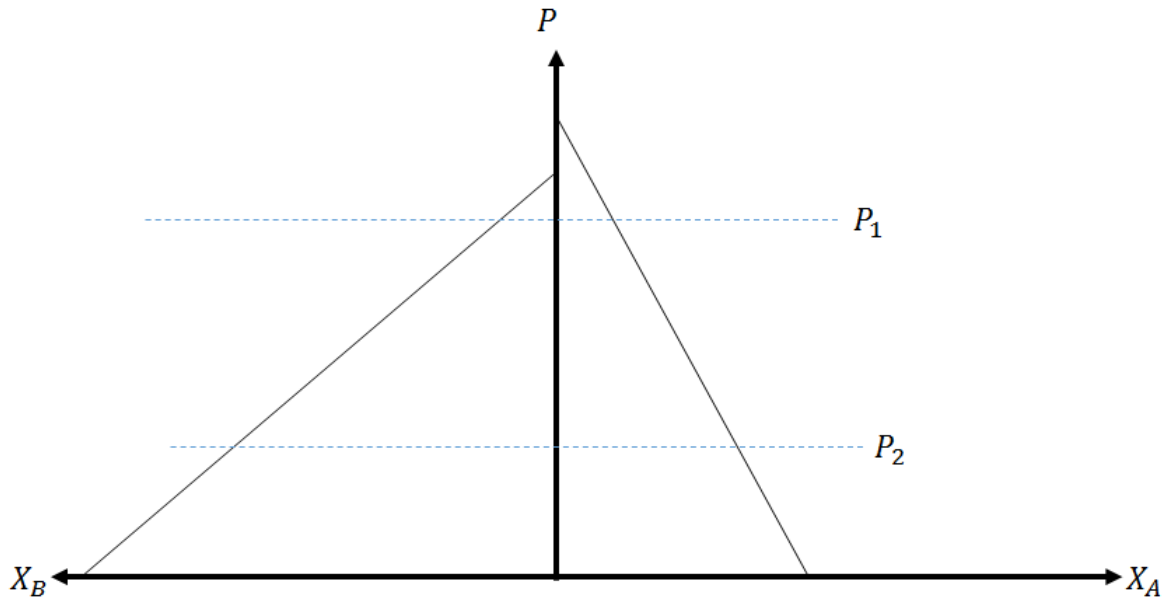
$$160 - 2P - 2P - 2(60 - P) = -2(160 - 2P)$$

Despejando la ecuación anterior para P nos da como resultado un precio de monopolio $P = 60$. No obstante, al precio de 60 sólo el consumidor grande comprará unidades del bien L, por lo que estaríamos de cierta forma de vuelta al caso 1. Sólo para comparar, veamos los beneficios bajo este caso. Sustituyendo el precio en la función de beneficios tenemos que los beneficios son $\Pi = 1,600$.

Los beneficios aquí son menores a los beneficios del caso 1, entonces el precio que maximiza los beneficios del monopolista bajo la restricción de mismo precio misma tarifa es $P = 50$.

Antes de pasar al caso de misma tarifa, distintos precios, vamos a aclarar algo respecto a los consumidores grandes y a los consumidores pequeños. Hay ocasiones en que, dependiendo de la elasticidad de la demanda, para respectivo nivel de precios P el individuo X puede estar dispuesto a pagar una mayor tarifa que el individuo Y, pero para otro nivel de precios P' el individuo Y esté dispuesto a pagar una mayor tarifa que X. Atendamos por ejemplo a la siguiente gráfica:

Gráfica 10



Notamos de la gráfica anterior que al precio P_1, el individuo A obtendría un mayor excedente de consumidor que el individuo B, por lo que A está dispuesto a pagar una tarifa más grande que B. En cambio, al precio P_2, el individuo B es quien recibe mayor excedente de consumidor, por lo que estará dispuesto a pagar mayor tarifa. En este caso no tenemos bien definido al consumidor "grande" porque la disponibilidad de pago de tarifa relativa al otro individuo varía según el nivel de precios.

Para resolver estos casos, los casos se multiplican. Ahora en lugar de considerar únicamente atender a uno con la tarifa grande o atender a ambos con la tarifa pequeña, tenemos que considerar si atendemos

únicamente a A con su tarifa máxima, únicamente a B con su tarifa máxima, atender a ambos con la tarifa máxima de A o atender a ambos con la tarifa máxima de B. Algunos de estos casos puede que se contradiga. Por ejemplo, planteamos atender únicamente a A cobrando un precio P y una tarifa F_A, pero puede que el individuo B también esté dispuesto a pagar el precio P y la tarifa F_A, por lo que el caso se contradice. No nos meteremos a un ejemplo así en estas notas.

7.6 Misma tarifa, distintos precios

Este caso es el último que veremos aquí. La misma tarifa significa que $F_A = F_B \equiv F$. Al igual que en el caso anterior, los beneficios son distintos dependiendo de si atendemos a toda la demanda o únicamente a un segmento. Los casos posibles son:

- Ponemos una tarifa muy elevada tal que sólo el individuo 1 querrá comprar. Los beneficios aquí toman la forma:
$$\Pi = P_A L_A + F_A - \frac{1}{2}(L_A)^2$$
- Intentamos atender a ambos segmentos de la demanda, incorporando la tarifa baja, y precios tal que ambos individuos consuman. Los beneficios se ven:
$$\Pi = P_A L_A + P_B L_B + 2F_B - \frac{1}{2}(L_A + L_B)^2$$

Resolvemos para cada caso y después comparamos beneficios. Como paréntesis, al igual que en el caso anterior, si no podemos especificar un consumidor "grande" (porque para determinado nivel de precios P a veces uno está dispuesto a pagar más, en para otro nivel de precios P' se invierten los papeles), tenemos que plantear el problema de maximización a veces cobrando la tarifa de A, F_A, y luego plantearlo con la tarifa de B, F_B. Para el ejemplo concreto, esto no será necesario.

Caso 1

De los beneficios planteados en la primera viñeta anterior, sustituímos y nos queda:

$$\Pi = P_A(100 - P_A) + \frac{(100 - P_A)^2}{2} - \frac{1}{2}(100 - P_A)^2$$

El caso equivale a discriminación de primer grado. De las condiciones de primer orden, es fácil obtener $P = 50$, $F_A = 1,250$ y $\Pi = 2,500$.

Caso 2

Ahora plateamos los beneficios de la segunda viñeta, cobrando la tarifa la tarifa del pequeño dos veces. Sustituyendo las demandas, con distintos precios, y los beneficios se ven así:

$$\Pi = P_A(100 - P_A) + P_B(60 - P_B) + (60 - P_B)^2 - \frac{1}{2}(160 - P_A - P_B)^2$$

De las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} P_A: &\quad (100 - P_A) - P_A = -(160 - P_A - P_B) \\ P_B: &\quad (60 - P_B) - P_B - 2(60 - P_B) = -(160 - P_A - P_B) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior de ecuaciones nos queda que $P_A = 80$ mientras que $P_B = 20$. Sustituyendo esto en la función de beneficios máximos obtenemos que, bajo este escenario, los beneficios del monopolista son iguales a $\Pi = 2,200$.

Comparando

Notamos entonces que los beneficios son mayores si el monopolista decide excluir al consumidor B y atiende únicamente al consumidor A.

Antes de pasar a monopsonio, me gustaría hacer una aclaración de este caso. De la gráfica 9 notamos cómo para el caso de mismo precio misma tarifa, para atender a los dos consumidores necesitábamos cobrar la tarifa "baja" (la de B), porque si intentábamos cobrar la tarifa "alta" (la de A, como el precio era igual, B no iba a pagar la tarifa. En este supuesto de precios distintos, esto podría no ocurrir. Por ejemplo, si el precio que cobramos a A es 90 y el precio que cobramos a B es 10. En este caso vemos cómo la tarifa máxima que está dispuesto a pagar B es mayor a la tarifa máxima que está dispuesto a pagar A ($F_A = 50$, $F_B = 1,250$. No obstante, este caso nunca ocurrirá en un máximo, ya que se puede demostrar que $P_A > P_B$ siempre que A sea un consumidor "grande" y B sea un consumidor "pequeño".

En el caso de que no podamos identificar un consumidor "grande" y uno "pequeño" (ejemplo de la gráfica 10), necesitaremos plantear ambos casos. En el primero, se cobra doblemente la tarifa máxima de A, F_A, y en el segundo se cobra doblemente la tarifa máxima de B, F_B. Aquí también comparamos beneficios para ver bajo qué caso son mayores, pero también tenemos que buscar antes si no hay una contradicción. En este caso en particular, una contradicción puede darse cuando decimos que cobraremos doblemente la tarifa máxima de A, pero B en realidad no está dispuesto a pagarla. Otra posibilidad es cuando un precio sale negativo.

Tomemos el ejemplo que hemos trabajado. Supongamos que a precios distintos, queremos cobrar la tarifa máxima de A. Entonces los beneficios se verían de la forma:

$$\Pi = P_A(100 - P_A) + P_B(60 - P_B) + (100 - P_A)^2 - \frac{1}{2}(160 - P_A - P_B)^2$$

Si resolvemos el problema anterior obtendremos que $P_A = -20$ y que $P_B = 80$. Aquí tenemos varias contradicciones, la primera es que el precio al individuo A es negativo, lo cual no puede ocurrir. En segundo lugar, el precio de B es mayor a 60 por lo que no consumirá nada. Y está de más decir que si el individuo B no consume, no pagará la tarifa máxima que está dispuesto a pagar A, con lo que tenemos la tercera contradicción.

7.7 Doble monopolio

Supongamos que existe un consumidor que tiene preferencias por el bien B con una demanda $B(P_B)$. No obstante, la empresa B requiere para su producción insumos de la empresa A. En otras palabras, la empresa B demanda bienes de A. Si la empresa B requiere A, entonces existe una función de producción para el bien B dada por $B = f(A)$. Ahora, la estructura de mercado es como sigue, B actúa como un monopolio sobre el consumidor, pero a su vez, A actúa como monopolio sobre la empresa B.

La forma de resolver este problema es la siguiente. En primer lugar, B verá cuánto está dispuesto a comprar el consumidor de su producto, y sus beneficios se ven de la forma:

$$\Pi_B = P_B B - P_A A$$

Estos beneficios se ven como todos los anteriores, en primer lugar el ingreso por ventas, y en segundo lugar los costos de comprar A para la producción. Ahora, vamos a sustituir las cantidades. Despejamos la demanda inversa de B, dada como $P_B(B)$. Recordemos también que $B = f(A)$, por lo que $A = f^{-1}(B)$. Así, los beneficios de la empresa B se ven de la siguiente manera:

$$\Pi_B = P_B(B)B - P_A f^{-1}(B)$$

De las condiciones de primer orden obtenemos:

$$P'_B(B)B + P_B(B) = P_A \frac{1}{f'(f^{-1}(B))}$$

Ahora, sabemos que $B = f(A)$, por lo que sustituyendo en la ecuación anterior nos queda:

$$P'_B(f(A))f(A) + P_B(f(A)) = P_A \frac{1}{f'(A)}$$

En la ecuación anterior podemos fácilmente despejar A en función de P_A. Esta ecuación nos da una función de demanda de A dependiente de su precio. Recordemos que la empresa B es quien demanda A. Llamemos a esta función $A = A(P_A)$, y llamemos a la demanda inversa $P_A = P_A(A)$. Ahora vayamos con la empresa A. Recordemos que sus beneficios se ven de la forma:

$$\Pi_A = P_A A - CT(A)$$

Sustituyendo la depanda inversa en la función de beneficios:

$$\Pi_A = P_A(A)A - CT(A)$$

De las conduciones de primer orden:

$$P'_A(A)P_A + P_A(A) = Cmg(A)$$

De la ecuación anterior es posible encontrar A^*, y sustituyéndola en la función de demanda inversa obtenemos P_A^*. Asimismo, recordémos que $B = f(A)$, por lo que sustituyendo A^* en la función de producción de B podemos obtener B^*. Sustituyemos ésta cantidad en la función de demanda inversa del consumidor y obtenemos P_B^*.

Para que no se queden con cara de qué pasó aquí arriba, haremos un ejemplo numérico, tomado del laboratorio. Existe un consumidor que demanda el bien B con una función $q_B = 20 - p_b$, por lo que la demanda inversa está dada por $p_B = 20 - q_B$. Por simplicidad, diremos que la empresa A no tiene costos, mientras que los costos de la empresa B están dados únicamente por comprar A, es decir, $CT_B = P_A A$. El problema también nos dice que para producir una unidad de B se requieren α unidades de A, por lo que la función de producción de B está dada por $q_B = \frac{1}{\alpha} q_A$. Entonces, la función de producción inversa es $q_A = \alpha q_B$. Planteamos los beneficios de B:

$$\Pi_B = P_B q_B - P_A q_A$$

Sustituimos para dejar todo en términos de B:

$$\Pi_B = (20 - q_B)q_B - P_A \alpha q_B$$

Maximizamos q_B, y por las condiciones de primer orden obtenemos que:

$$20 - 2q_B = \alpha P_A$$

Sustituimos $q_B = \frac{1}{\alpha}$ y despejamos el precio de A, y nos queda:

$$P_A = \frac{1}{\alpha}\left(20 - \frac{2}{\alpha} q_A\right)$$

Esto es la demanda inversa de A por la empresa B. Ahora la empresa A puede usar esta demanda para manipular el precio. Dado que la empresa A no tiene costos, sus beneficios se ven:

$$\Pi_A = P_A A$$

Sustituyendo:

$$\Pi_A = \frac{1}{\alpha}\left(20 - \frac{2}{\alpha} q_A\right) q_A$$

De las condiciones de primer orden:

$$\frac{20}{\alpha} - \frac{4}{\alpha^2} q_A = 0$$

De donde:

$$q_A = 5\alpha$$

Sustituyendo en la demanda inversa de A:

$$P_A = \frac{10}{\alpha}$$

Sustituimos q_A en la función de producción de B:

$$q_B = 5$$

Y esto en la función de demanda inversa del consumidor nos da:

$$p_B = 15$$

8 Monopsonio

En las secciones anteriores, hemos visto el comportamiento de un monopolio. Un monopsonio es una estructura de mercado en la cual existe un único oferente de un bien, por lo que el monopsonio puede internalizar la oferta dentro de sus beneficios para maximizarlos, ya que siente que puede alterar el precio. Ahora analizaremos la estructura de mercado en la que existe un único comprador del bien, y que por lo tanto también sabe que puede controlar el precio y la cantidad del bien que está demandando.

Supondremos el caso de la empresa única que demanda trabajo en un pueblo. Dado que es la única cercana, los habitantes se ven obligados a trabajar ahí. Antes de pasar al monopsonio, analicemos la situación competitiva. aquí, los beneficios están dados por:

$$\Pi = p_x F(L) - wL$$

En donde $F(L)$ es la función de producción del bien X. Aquí, la empresa elige la cantidad de trabajadores que maximizan sus beneficios. La empresa percibe que el salario es constante, por lo que cada unidad adicional de trabajo tiene un costo marginal igual a w. De las condiciones de primer orden obtenemos que:

$$p_x F'(L) = w$$

De lo anterior vemos que el salario es igual al valor del producto marginal del trabajo (el producto marginal por el precio de venta del producto). La intuición es sencilla. Si producir una cantidad adicional nos genera \$5 de beneficio, y producirla nos cuesta \$3, nos conviene producirla ya que tenemos un excedente de la venta de esa unidad igual a \$2. Pero si producirla ahora nos costara \$9, ahora no convendría producirla pues tendríamos una pérdida de \$4 por producir esta unidad. El momento en el que se igualan el salario al valor del producto marginal es cuando la empresa está indiferente entre producir y no producir. Para cerrar el modelo, diremos que en este caso la empresa producirá (además, como los cambios son marginales, infinitesimales, no tiene sentido decir que va a producir infinitesimalmente menos).

Ahora pasemos al monopsonio. Digamos que los trabajadores ofrecen su trabajo con base en una oferta laboral conocida por las empresas contratantes, y dicha oferta está especificada por:

$$L = L(w)$$

Esta oferta es creciente en el salario $L'(w) > 0$. Definamos la función inversa, por lo mismo de que es siempre creciente, como:

$$w = w(L)$$

La empresa monopsónica puede producir un bien con una tecnología dada por:

$$X = F(L)$$

Como el monopsonio conoce la oferta laboral y la puede integrar en su función de beneficios. Al igual que en el monopolio, el monopsonio puede elegir salario o cantidad de trabajo, entonces para efectos diremos que elige cantidad de trabajo, e integramos la oferta inversa de trabajo a los beneficios. Éstos se ven ahora de la siguiente manera manera:

$$\Pi = p_x F(L) - w(L)L$$

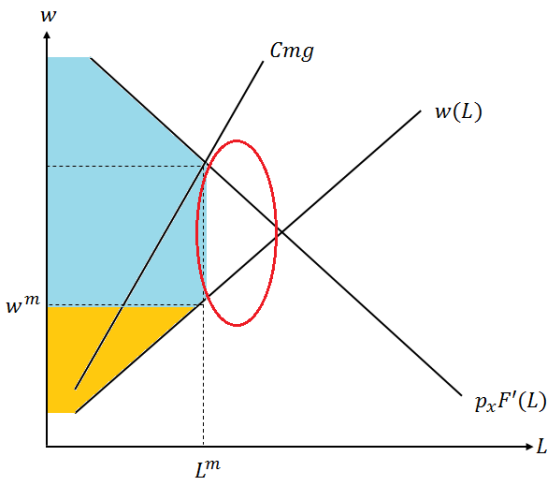
De la especificación anterior, vemos cómo la empresa ahora no enfrenta a un salario constante, sino que cambiar la cantidad de trabajo demandado puede alterar el salario que paga a los empleados. Conociendo esto, ahora tiene más control y puede obtener mayores beneficios. De las condiciones de primer orden tenemos que:

$$p_x F'(L) = w(L) + w'(L)L$$

La interpretación anterior es la misma que hemos hecho siempre para las empresas: el ingreso marginal dado por la venta de la cantidad de bienes por una unida adicional de trabajo tiene que igualar al costo marginal de contratar dicha unidad de trabajo. El beneficio marginal es igual que en el caso anterior: cada unidad adicional de trabajo me produce marginalmente $F'(L)$ del bien, el cual vendo a un precio p_x, por lo que esto me da el ingreso marginal. Ahora, el costo marginal que percibe la empresa cambia. En primer lugar, a cada trabajador adicional deberé pagarle el salario $w(L)$. Pero además, por cada trabajador adicional contratado, sabe que habrá una diferencia en el salario dado por $w'(L)$. Por eso los Costos Marginales ahora se ven de manera distinta.

Para obtener la cantidad de trabajo de equilibrio basta despejar el trabajo de las CPO. Para obtener el salario, sustituimos el trabajo obtenido anteriormente en la oferta inversa de trabajo. Gráficamente:

Gráfica 11



En la gráfica anterior tenemos la función de producto marginal (decreciente) multiplicado por su precio. Asimismo, tenemos la inversa de la oferta laboral, y el costo marginal que percibe el monopsonista. Notamos que está por arriba de la función inversa de oferta pues el monopsonista sabe que por cada trabajador adicional, su costo crece tanto por mayores trabajadores, tanto porque éstos exigen mayores salarios. El área superior corresponde al excedente del demandante (las empresas demandan trabajo), y el área inferior

el excedente del oferente (los individuos ofrecen trabajo). Circulada está el área que antes se repartían los agentes en mercados competitivos (valor de producto marginal igual a salario) y que ahora nadie percive (pérdida en bienestar social).

Ahora bien, regresemos a las CPO. Definamos $p_x F'(L) = VPmg$, como el valor del producto marginal del trabajo. Cambiando la notación de la derivada de la oferta inversa de trabajo y despejando términos de las CPO tenemos que:

$$VPmg - w(L) = \frac{dw(L)}{dL} L$$

Dividiendo ambos lados entre el salario:

$$\frac{VPmg - w(L)}{w(L)} = \frac{dw(L)}{dL} \frac{L}{w(L)}$$

Notamos que del lado derecho, debido a que la oferta es estrictamente creciente, tenemos el inverso de la elasticidad de la oferta laboral. Llamemos a la elasticidad de la oferta laboral η_L. Por lo que tenemos un índice de poder monopólico dado por:

$$\frac{VPmg - w}{w} = \frac{1}{\eta_L}$$

Como la elasticidad de la oferta es positiva, el término del lado derecho es positivo, por lo que podemos concluir que:

$$VPMg \geq w$$

Es decir, el salario va a ser menor al valor de su producto marginal, esto, como ya lo habíamos visto de la gráfica. Este índice nos dice el grado de concentración monopsónica. Al igual que el Índice de Lerner para monopolio, la interpretción es una diferencia porcentual entre el salario y la productividad marginal. En el escenario ideal, la empresa paga un salario igual al valor del producto marginal, por lo que el índice es igual a 0. Conforme el salario que paga se vuelve menor, el índice va creciendo. La ecuación anterior nos da, al igual que en el monopolio, una regla de elasticidad inversa para el caso del monopsonio.

9 Conclusiones

Esta primera aproximación a los monopolios nos dice por qué son indeseables. Si bien la discriminación en primer grado no genera pérdida en bienestar, notamos cómo es en detrimiento del excedente del consumidor. Aquí la cuestión no es meramente de eficiencia económica, sino de cuál es el ideal social. En general, entre más discriminación pueda ejercer el monopolio, más eficiente serán los mercados. ¿Esto significa que hay que dejar operar a los monopolios a su conveniencia? No necesariamente. Por un lado, si el ideal social es que el consumidor obtenga un beneficio, es necesario limitar el poder de los monopolios. Pero económicamente, quizás los monopolios empiecen a ser más ineficientes si se ve un horizonte de largo plazo que contemple inversión óptima. Si el factor de descuento intertemporal de la sociedad en su conjunto es distinto que el del monopolista, incluso la discriminación perfecta no llevaría al óptimo social.

Asimismo, vimos que, por el lado del la regla de elasticidad inversa, que no es necesario combatir directamente a los monopolios, sino que se pueden fomentar productos sustitutos del bien proveído por el monopolio. Por poner un ejemplo, Apple tiene el monopolio sobre la producción y venta del iPhone. No obstante, compite contra el Samsung Galaxy, y otros teléfonos inteligentes, lo cual permite mantener precios relativamente bajos (sí no hubiera Samsung Galaxy, sería más caro el iPhone). Así, en algunos casos ni siquiera es necesario combatir los monopolios directamente. A este caso le llamamos *Monopolios Competitivos*, ya que si bien una empresa tiene el monopolio de un bien, este bien tiene que competir con otros bienes sustitutos.

Hay también que distinguir por qué existe el monopolio. en muchos casos, la aspiración a ejercer poder monopólico y ganancias extranormales es incentivo para la investigación y desarrollo, que ultimadamente lleva a nuevos productos al mercado. Hay algunos modelos de preferencia por la variedad (iniciados por Stiglitz, aunque hay que usarlos con cautela), en donde la introducción de un producto nuevo incrementa la utilidad de los agentes.

No obstante, algo que preocupa a nivel social es el proceso de competencia, y los incentivos de los monopolios a abusar de su poder de mercado para impedir la entrada de competidores que potencialmente puedan lograr eficiencias. Existen modelos sobre prácticas predatorias (precios por debajo de costos) o exclusivas (negativa de trato) que analizan relaciones de los monopolistas no hacia los consumidores, sino hacia los potenciales competidores ya sea en el mercado en cuestión, o en mercados relacionados. En general, para esto se utiliza la política de competencia, que es un análisis ex post de las conductas, contrario a la regulación que se extablece ex ante para impedir conductas abusivas en mercados que se sabe son más vulnerables.

Es importante también mencionar el caso de los monopolios naturales. Estos monopolios son aquellos en los que el costo promedio es decreciente, por lo que es eficiente que una única empresa provea del servicio. Adicionalmente, en estos casos nunca es eficiente que se iguale el precio al costo marginal, pues la empresa tendría pérdidas. Aquí se requiere en general una regulación ad hoc.

Hay también casos de modelos más complicados en que una única empresa provee a un único consumidor, por lo que tenemos una combinación entre monopolio y monopsonio. Este caso es muy común para la producción de componentes de tecnología muy específicos, por ejemplo, la producción de las turbinas *Trent 1000* producida por *Roll Royce*, y cuyo único fin es motorizar al *787* de *Boeing*. En estos casos, hay que considerar varias cuestiones. En primer lugar, la existencia de un contrato bien detallado, que garantice que la demanda será cubierta por *Roll Royce*, y que, una vez producida las turbinas, *Boeing* comprará las turbinas al precio pactado previamente (pues posteriormente gana poder ya que *Roll Royce* no le puede vender la turbina a otro consumidor). En estos casos se considera que no hay un segmento precio-aceptante, y se analiza desde la teoría de la negociación. El papel del estado, entonces, es garantizar el cumplimiento de los contratos, antes que un tema de competencia (aunque pueden coincidir).

El planteamiento del modelo que hagamos tendrá que estar en función de la estructura de mercado que queramos analizar. Es importante, entonces, tener en cuenta qué supuestos son los que tenemos que romper y cuáles son los que tenemos que añadir. Asimismo, es importante saber qué supuestos generan qué resultados para dar una mejor interpretación.

10 Referencias

La mayor parte de esta nota parte del capítulo 2 de *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation* de Jean-Jacques Laffont y Jean Tirole (premio Nobel de Economía en 2014). El libro es más técnico, y los modelos son más sofisticados por lo que no es recomendable si no se tienen las herramientas de cálculo integral y diferencial, así como de optimización dinámica. Aunque sólo se publicó una edición en 1993, y no ha vuelto a ser revisado, sigue siendo un referente bastante sólido en la materia.

El modelo clásico de monopolio, y su aplicación de monopsonio, tiene referentes más sencillos en libros como *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions* de Walter Nicholson (cualquier edición).